Álgebra

Intelectum
EVOLUCIÓN



Intelectum Álgebra

IX

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica las clases de propiedades sobre teoría de exponentes en la potenciación y la radicación.
- Resuelve operaciones aplicando las propiedades sobre la teoría de exponentes en la potenciación y radicación.
- Interpreta las propiedades de los valores numéricos notables en los polinomios.
- Identifica las propiedades en los polinomios y establece diferencias entre las clases de polinomios.
- Aplica propiedades en las operaciones sobre productos notables.
- Demuestra las propiedades sobre productos notables y las aplica en la resolución de ejercicios.
- Aplica algoritmos sobre divisibilidad en la división sobre polinomios.
- Identifica la veracidad de distintas propiedades sobre división de polinomios.
- Representa e interpreta las fórmulas de los cocientes notables en el cálculo del término general.
- Demuestra las propiedades en los cocientes notables.

Unidad 2

- Formula las propiedades sobre factorización y establece sus criterios del aspa simple ,doble especial.
- Resuelve operaciones aplicando las propiedades sobre aspa simple y doble especial en las operaciones establecidas.
- Interpreta las propiedades del MCM-MCD en las fracciones algebraicas.
- Aplica las propiedades que existen en el MCD-MCM en las operaciones sobre fracciones.
- Reconoce las propiedades de los números combinatorios y aplica el binomio de Newton en la potenciación.
- Aplica el binomio de Newton y los relaciona con el triángulo de Pascal en la potenciación.
- Identifica los radicales semejantes y homogéneos en las operaciones con radicales y potencia.
- Aplica el factor racionalizante en las operaciones sobre racionalización.
- Interpreta la forma polar o trigonométrica de un número complejo.
- Elabora una gráfica sobre el sistema de coordenadas en donde representa geométricamente a un número complejo.

REFINERÍA TALARA: PATRIMONIO NACIONAL

La refinería de Talara se localiza en el departamento de Piura, tiene como función la refinación y comercialización de hidrocarburos. Elabora gas doméstico GLP, gasolina, diésel, petróleos industriales y asfaltos.

En la figura que se encuentran en la parte izquierda se necesita saber el número de planchas metálicas inoxidables que se deben utilizar en cada ventana de la construcción de un depósito de petróleo.

Para ello hacemos uso del MCM y MCD, ya que entre las múltiples aplicaciones del MCM y MCD está la de distribuir una cantidad de objetos semejantes en otra de magnitud mayor.

En el Álgebra los conceptos de MCM y MCD se extienden a expresiones algebraicas.



Contenido:

Unidad 3

- Identifica los tipos de ecuaciones que tienen soluciones en el conjunto de los números reales.
- Identifica los tipos de ecuaciones compatibles e incompatibles en el conjunto de los números reales.
- Interpreta las propiedades de adición y multiplicación de matrices.
- Aplica las propiedades de adición y multiplicación en las operaciones con matrices.
- Interpreta el teorema fundamental de la determinante de orden tres.
- Aplica la regla de sarrus vertical en determinantes de orden tres.
- Identifica los criterios de sustitución e igualación en el sistema de ecuaciones lineales.
- Aplica el criterio de sustitución e igualación en sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Identifica la suma y multiplicación de raíces en las ecuaciones de segundo grado.
- Analiza los puntos críticos en la recta numérica en la inecuaciones de grado superior.

Unidad 4

- Aplica el valor absoluto en las ecuaciones e inecuaciones y los representa en la recta real.
- Elabora la gráfica de las funciones valor absoluto y constante en el conjunto de los números reales.
- Reconoce la gráfica del valor absoluto en las ecuaciones e inecuaciones.
- Identifica las propiedades en las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto y los representa mediante intervalos en la recta numérica.
- Analiza operaciones que involucran la gráfica del valor absoluto en la recta numérica mediante intervalos.
- Aplica las propiedades del cambio de base y la regla de cadena en los logaritmos.
- Representa las distintas propiedades del cambio de base y la regla de cadena en los logaritmos y establece relaciones con los cologaritmos.
- Identifica el dominio y rango en una función identidad y constante en el conjunto de los números reales.
- Aplica las propiedades de interpolación de medios aritméticos en una progresión aritmética y establece las relaciones con la progresión geométrica y armónica.



EN EL VALLE COSTEÑO DE LUNAHUANÁ



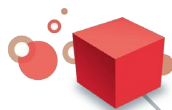












UNIDAD 1

TEORÍA DE EXPONENTES

POTENCIACIÓN

Es la operación matemática que tiene por objetivo encontrar una expresión llamada potencia (p), conociendo previamente otras dos expresiones denominadas base (b) y exponente (n).

$b^n = p$; donde $\begin{cases} b\text{: base; } b \in \mathbb{R} \\ n\text{: exponente; } n \in \mathbb{Z} \\ p\text{: potencia; } p \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ejemplo:
En $2^3 = 8 \Rightarrow$ 2 es la base,
3 es el exponente y
8 es la potencia.

Definiciones

1. Exponente cero

$a^0 = 1;\ a \neq 0$

Ejemplos:
$5^0 = 1;\ (-3)^0 = 1;\ -7^0 = -1$

2. Exponente uno

$a^1 = a;\ \forall\ a \in \mathbb{R}$

Ejemplos:
$4^1 = 4;\ 5^1 = 5$

3. Exponente entero positivo

$a^n = \underbrace{a\ .\ a\ .\ a\ .\ ...\ .\ a}_{n \text{ veces}};\ n \geq 2$

Ejemplo: $\underbrace{\sqrt[7]{x}\ .\sqrt[7]{x}\ .\sqrt[7]{x}\ ...\sqrt[7]{x}}_{28 \text{ veces}} = (\sqrt[7]{x})^{28} = x^4$

4. Exponente negativo

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};\ a \neq 0$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n;\ ab \neq 0$

Ejemplos: $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2};\ 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$



Atención

$a^{m+n} = a^m\ .\ a^n$

Permite extraer factores comunes.

Ejemplo:

$$\frac{2^{x+4} + 2^{x+3} - 2^{x+1}}{2^{x+3} - 2^{x+2}}$$

$$\frac{2^{x+1}2^3 + 2^{x+1}.2^2 - 2^{x+1}}{2^{x+1}.2^2 - 2^{x+1}.2}$$

Extraemos el factor: 2^{x+1}

$$\frac{\cancel{2^{x+1}}(2^3 + 2^2 - 1)}{\cancel{2^{x+1}}(2^2 - 2)} = \frac{11}{2}$$

Teoremas

1. Multiplicación de bases iguales

$a^m\ .\ a^{-n}\ .\ a^p\ .\ a^{-q} = a^{m-n+p-q}$

Ejemplo: $x^4\ .\ x^{-2}\ .\ x^5\ .\ x^{-1} = x^{4-2+5-1} = x^6$

2. División de bases iguales

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ a \neq 0$

Ejemplos:

$\dfrac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$

$\dfrac{5^{13}}{5^9} = 5^{13-9} = 5^4 = 625$

$\dfrac{(5^2)^8}{(5^4)^4} = \dfrac{5^{16}}{5^{16}} = 5^{16-16} = 5^0 = 1$

3. Potenciación de una división

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n;\ b \neq 0$

Ejemplos:

$\dfrac{x^3}{y^3} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^3$

$\left(\dfrac{x^4}{y^3}\right)^2 = \dfrac{(x^4)^2}{(y^3)^2} = \dfrac{x^8}{y^6}$

$\dfrac{25^4}{5^4} = \left(\dfrac{25}{5}\right)^4 = 5^4 = 625$

4. Potenciación de otra potencia

$(a^m)^n = a^{m\ .\ n}$

Ejemplos: $(x^2)^5 = x^{2\ .\ 5} = x^{10}$

$(y^{-2})^{-4} = y^{-2\ .\ -4} = y^8$

5. Potenciación de una multiplicación

$a^nb^n = (ab)^n$

Ejemplos:

$a^3b^3c^3 = (abc)^3$

$(x^2\ .\ y^3)^5 = (x^2)^5\ .\ (y^3)^5 = x^{10}\ .\ y^{15}$

$15^6 = (3\ .\ 5)^6 = 3^6\ .\ 5^6$

$12^4 = (3\ .\ 2^2)^4 = 3^4\ .\ 2^{2\ .\ 4} = 3^4\ .\ 2^8$

6. Exponentes sucesivos

$x^{m^{n^p}} = x^{m^a} = x^b = c$

Ejemplos:

$7^{2^{5^0}} = 7^{2^1} = 7^2 = 49$

$3^{2^2} = 3^4 = 81$

$2^{5^{2010^{0^7}}} = 2^{5^{2010^0}} = 2^{5^1} = 2^5 = 32$

Recuerda

Descomponiendo en sus factores primos podemos hacer uso de:

$(a^m)^n = a^{m\ .\ n}$

Ejemplo:

$16^5 - 1024^2 + 4^2$

$(2^4)^5 - (2^{10})^2 + 4^2$

Factores primos

$2^{4\ .\ 5} - 2^{10\ .\ 2} + (2^2)^2$

$\underbrace{2^{20} - 2^{20}}_{0} + 2^4$

$= 2^4$



RADICACIÓN

Es una operación matemática inversa a la potenciación cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz (b), conociendo otras dos expresiones denominadas radicando **a** e índice **n**.

$\sqrt[n]{a} = b$; donde
- $\sqrt{\ }$: signo radical
- n: índice; $n \in \mathbb{Z}^+$
- a: radicando o cantidad subradical
- b: raíz; $b \in \mathbb{R}$

Ejemplo:
En $\sqrt[3]{64} = 4$ tenemos:
3 es el índice
64 el radicando y
4 la raíz.

Definiciones

1. $\forall$ **a, b** $\in \mathbb{R}$, **n** $\in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^n$$

Ejemplos:

$\sqrt{9} = 3 \Longleftrightarrow 9 = 3^2$

$\sqrt[3]{-8} = -2 \Longleftrightarrow -8 = (-2)^3$

Observación
Debemos tener en cuenta que dentro del conjunto de los números reales no se define a la radicación cuando el índice es par y el radicando negativo, como en los ejemplos:

$\sqrt[4]{2004}$ existe en $\mathbb{R}$.

$\sqrt{-32}$ no existe en $\mathbb{R}$.

2. **Exponente fraccionario**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

$(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{-8}^{\,2} = (-2)^2 = 4$

$\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

3. $\forall$ **a** $\in \mathbb{R} \wedge$ **n** $\in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a; \text{ si n es impar} \\ |a|; \text{ si n es par} \end{cases}$$

- |a|: valor absoluto de **a**, significa el valor positivo de **a**.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \sqrt[7]{2^7} = 2$

$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2|$

Teoremas

1. **Radicación de una multiplicación**

$$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b}$$

Ejemplo:

$\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\,.\,4} = \sqrt[3]{8} = 2$

2. **Radicación de una división**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};\ b \neq 0$$

Ejemplo:

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

3. **Raíz de raíz**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3.2]{x} = \sqrt[6]{x}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^7}}} = \sqrt[3\,.\,4\,.\,5]{x^7} = \sqrt[60]{x^7}$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Es una igualdad relativa que se verifica para determinados valores de sus letras, variables o incógnitas, los cuales se denominan raíces o soluciones.

Propiedades

1. Si: $b^x = b^y \Rightarrow x = y$ $\quad \forall\, b \neq \{0; 1\}$

Ejemplo:

$3^{x+1} = 9 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^2 \Rightarrow x + 1 = 2$

$x = 1$

2. Si: $x^n = a^n \Rightarrow x = a$ $\quad \forall\, n \neq 0$

Ejemplo:

$x^3 = 2^6 \Rightarrow x^3 = (2^2)^3$

$x = 2^2 = 4$

3. Si: $x^x = a^a \Rightarrow x = a$ $\quad \forall\, x \neq 0$

Ejemplo:

$x^3 = 27 \Rightarrow x^3 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

4. Si: $\sqrt[x]{x} = \sqrt[m]{m} \Rightarrow x = m$ $\quad \forall\, x \neq 0; \{x; m\} \subset \mathbb{N}$

Ejemplo:

$\sqrt[x+1]{x+1} = 3^{1/3} \Rightarrow \sqrt[x+1]{x+1} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x + 1 = 3$

$x = 2$

Atención

No te olvides de las propiedades de los signos de las operaciones algebraicas.

Multiplicación
(+) . (+) = (+)
(+) . (−) = (−)
(−) . (+) = (−)
(−) . (−) = (+)

División
$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(+)}{(-)} = (-)$

$\frac{(-)}{(+)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(-)} = (+)$

Potenciación
$(+)^{par} = (+)$
$(+)^{impar} = (+)$
$(-)^{impar} = (-)$
$(-)^{par} = (+)$

Radicación
$\sqrt[par]{(+)} = (\pm)$
$\sqrt[impar]{(+)} = (+)$
$\sqrt[impar]{(-)} = (-)$
$\sqrt[par]{(-)}$ = cantidad imaginaria



Recuerda

Las propiedades adicionales:

1. $a^m\sqrt{b} = \sqrt[m]{a^m b}$

Ejemplos:
- $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 . 2} = \sqrt{8}$
- $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 . 2} = \sqrt{18}$

2. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$

Ejemplos:
- $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2.2]{2^{1.2}} = \sqrt[4]{4}$
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3.7]{5^{1.7}} = \sqrt[21]{5^7}$

3. $\sqrt[m]{x^a \sqrt[n]{x^b \sqrt[p]{x^c}}} = x^{\frac{(a.n+b)p+c}{mnp}}$

Ejemplo:
- $\sqrt[3]{x^2 \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2}}} = x^{\frac{(2.4+3)2+2}{3.4.2}}$

$= x^{\frac{2.4.3}{3.4.2}} = x$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$$S = \frac{7^{x+2} - 7^{x+1}}{7^{x+1} - 7^{x}}$$

Resolución:

Descomponemos la base y factorizamos 7^x:

$$S = \frac{7^x . 7^2 - 7^x . 7}{7^x . 7 - 7^x} = \frac{7^x(7^2 - 7)}{7^x(7-1)} = \frac{49-7}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

2 Calcula el valor de x: $\sqrt[4]{x^x\sqrt[x]{2}} = \sqrt[x]{x}$

Resolución:

Homogenizamos los radicales: $\sqrt[4x]{x^{x^2} . 2} = \sqrt[4x]{x^4}$

Luego: $x^{x^2} . 2 = x^4$

Transponemos términos:

$$\frac{x^{x^2}}{x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{x^2-4} = 2^{-1} = 2^{-2/2} = \sqrt{2}^{-2}$$

Dando forma:

$$x^{x^2-4} = \sqrt{2}^{2-4} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2-4}$$

Se observa que: $x = \sqrt{2}$

3 Calcula el valor de:

$$Z = \frac{5(3^{n+5})}{3^{n+4} - 3^{n+3} - 3^{n+2}}$$

Resolución:

Extraemos el factor común: 3^{n+2}

$$Z = \frac{5 . 3^{n+2} . 3^3}{3^{n+2}(3^2 - 3 - 1)} \Rightarrow Z = \frac{5 . 3^3}{5} = 27$$

$\therefore\ Z = 27$

4 Simplifica:

$$W = \frac{\overbrace{\sqrt[7]{x}\sqrt[7]{x}\sqrt[7]{x}\ldots\sqrt[7]{x}}^{28 \text{ factores}}}{\sqrt[5]{\underbrace{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}\ldots\sqrt[3]{x}}_{15 \text{ factores}}}}$$

Resolución:

Recuerda que:

$$\underbrace{a}_{1 \text{ factor}} = a \qquad \underbrace{a . a . a . a}_{4 \text{ factores}} = a^4$$

$$\underbrace{a . a}_{2 \text{ factores}} = a^2 \qquad \vdots$$

$$\underbrace{a . a . a}_{3 \text{ factores}} = a^3 \qquad \underbrace{a . a . a \ldots a}_{n \text{ factores}} = a^n$$

En la expresión resulta: $W = \dfrac{(\sqrt[7]{x})^{28}}{\sqrt[5]{(\sqrt[3]{x})^{15}}}$

Luego: $W = \dfrac{x^{\frac{28}{7}}}{\sqrt[3]{x^{\frac{15}{5}}}} = \dfrac{x^4}{x} = x^3 \quad \therefore\ W = x^3$

5 Simplifica:

$$R = \frac{\sqrt[a-b]{x^{(a-c)^{-1}}}\ \sqrt[b-a]{x^{(b-c)^{-1}}}}{\sqrt[c-a]{x^{(b-c)^{-1}}}}$$

Resolución:

Aplicamos las propiedades para luego simplificar:

$$R = \frac{x^{\frac{(a-c)^{-1}}{a-b}} . x^{\frac{(b-c)^{-1}}{b-a}}}{x^{\frac{(b-c)^{-1}}{c-a}}} = x^{\frac{(a-c)^{-1}}{a-b} + \frac{(b-c)^{-1}}{b-a} - \frac{(b-c)^{-1}}{c-a}}$$

$$R = x^{\frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}}$$

$$R = x^{\frac{(b-c)-(a-c)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}}$$

Al eliminar los paréntesis ten cuidado con el signo negativo, este afecta a cada término dentro del paréntesis:

$$R = x^{\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}} \Rightarrow R = x^0 = 1 \qquad \therefore\ R = 1$$

6 Efectúa:

$$T = \left((2^{-3^{-1}})^{27^{9^{-2^{-1}}}}\right)^{-1}$$

Resolución:

Primero reducimos: $2^{-3^{-1}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Luego, reducimos:

$$27^{9^{-2^{-1}}} = 27^{9^{-\frac{1}{2}}} = 27^{(3^2)^{-\frac{1}{2}}} = 27^{3^{2.\left(-\frac{1}{2}\right)}}$$

$$= 27^{3^{-1}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

Reemplazamos los valores encontrados en T y operamos:

$$T = \left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)^{-1} \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}.3(-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2 \qquad \therefore\ T = 2$$

7 Halla el valor de:

$$M = 4^{-4^{-4^{-4^{-4^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$$

Resolución:

Como los exponentes son los mismos, reemplazamos:

$$M = 4^{-M} \Rightarrow M^{1/M} = \frac{1}{4} \Rightarrow M^{1/M} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1/2}}$$

Igualamos la ecuación exponencial:

$\therefore$ M = 1/2

POLINOMIOS

Recuerda

LA NOTACIÓN POLINÓMICA es una representación usada para denotar polinomios de una variable, dicha notación se hace extensiva para más variables.

1 variable:
P(x), Q(x), F(x)

2 variables:
P(x; y), Q(x; y), F(x; y)

3 variables:
P(x; y; z), Q(x; y; z), F(x; y; z)

P, Q, F: identifica al polinomio



Atención

- Se denomina POLINOMIO MÓNICO a aquel polinomio de una variable cuyo COEFICIENTE PRINCIPAL es 1.
  Ejemplo:
  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3$
  $S(x) = 31x^6 + x^{10} - 57x^3 + 2$
  $\Rightarrow$ P(x) y S(x) son mónicos.

- Ten en cuenta siempre estas propiedades del grado absoluto (GA):

1. Si: $P(x) = (3x^m + 5)(7x^n + 3)$
   $GA(P) = m + n$
2. Si: $T(x) = \dfrac{5x^m - 3}{7x^n + 2}$
   $GA(T) = m - n$
3. Si: $A(x) = (x^m - 10)^n$
   $GA(A) = mn$
4. Si: $Y(x) = \sqrt[m]{3x^n + 1}$
   $GA(Y) = \dfrac{n}{m}$



DEFINICIÓN

Un polinomio es una expresión algebraica donde los exponentes de las variables son números naturales.

POLINOMIO DE UNA VARIABLE

Generalmente se utiliza la letra **x** para indicar la variable, donde el mayor exponente de la variable es llamado el grado del polinomio.

Forma general del polinomio de grado n: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$

Donde:

$a_0 \neq 0$: coeficiente principal (coeficiente de la variable con mayor exponente).
$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$: coeficientes del polinomio.
a_n : término independiente.
x : variable o indeterminada.

Propiedades (valores numéricos notables)

Para el polinomio de grado n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Suma de coeficientes (Σ coef.)

Para calcular la suma de coeficientes del polinomio P(x); a la variable x se le asigna el valor de la unidad.

$$\Sigma\ coef.(P) = P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplo:
Del polinomio: $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 2 \Rightarrow \Sigma\ coef.(P) = P(1) = 1^4 + 3(1)^3 + 2(1)^2 - (1) + 2 = 7$

Término independiente (TI)

Para calcular el término independiente; a la variable x se le asigna el valor de cero. $TI(P) = P(0) = a_n$

Ejemplo:
Halla el TI del polinomio: $S(x) = 31x^6 + x^{10} - 57x^3 + 2 \Rightarrow TI(S) = S(0) = 2$

GRADOS DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es la categoría que se asigna a un polinomio y depende de los exponentes de sus variables.

Clases de grados

Grado relativo (GR): respecto a una de las variables. **Grado absoluto** (GA): respecto a todas sus variables.

Grado de un monomio

Ejemplo:

$$T(x; y; z) = \frac{\sqrt{3}}{a^2}x^3y^{10}z^5w^3$$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el exponente de la variable en referencia: GR(x) = 3; GR(y) = 10; GR(z) = 5	Es la suma de los exponentes de las variables: GA(T) = 3 + 10 + 5 = 18

Grado de un polinomio

Ejemplo:

$$P(x; y; z) = \underbrace{51x^{10}y^2z}_{GA = 13} - \underbrace{10x^2y^{20}z^7}_{GA = 29} + \underbrace{\frac{4^a}{\sqrt{3}}xy}_{GA = 2} - \underbrace{\frac{ab}{5}w^{10}x^7y^{27}}_{GA = 34}$$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el mayor exponente de la variable en referencia: GR(x) = 10; GR(y) = 27; GR(z) = 7	Es el mayor grado absoluto de uno de sus monomios. GA(P) = 34



POLINOMIOS ESPECIALES

Se denomina así porque los polinomios presentan ciertas características especiales, ya sea por la distribución de sus términos o por los exponentes que afectan a sus variables, estos son:

1. Polinomios homogéneos

Son aquellos polinomios que tienen todos sus términos de igual grado absoluto.

El polinomio: $A(x; y) = \underbrace{7x^a}_{GA = a} + \underbrace{3x^3y^{a-3}}_{GA = a} - \underbrace{y^a}_{GA = a} - \frac{3}{7}\underbrace{x^{a-1}y^1z^a}_{GA = a}$

Es un polinomio homogéneo cuyo grado de homogeneidad es "a".

2. Polinomio completo

Es cuando tienen todas las potencias sucesivas de la variable, en referencia, desde la mayor hasta el cero incluido.

El polinomio:

GR(x) → 2, 3, 0, 1, 4

$B(x; y; z) = 20\overbrace{x^2}^{2}y^2z^2 - 10\overbrace{x^3}^{3}y^3 - 7z^3y^9\overbrace{x^0}^{0} + \overbrace{x^1}^{1}y^7z^7 + 8\overbrace{x^4}^{4}y^2z$

x tiene exponente cero — x tiene exponente uno

Tiene todas las potencias de la variable x desde el exponente 4 hasta cero, luego diremos que el polinomio es completo respecto a x.

Importante:

Si el polinomio B(x; y; z) es completo respecto una variable, entonces: n.° términos = GR(x) + 1

Del ejemplo: el polinomio B(x; y; z) es completo respecto a x: ⇒ n.° términos = 4 + 1 = 5

3. Polinomio ordenado

Es aquel donde los exponentes de la variable ordenatriz van aumentando (ordenados ascendentemente) o disminuyendo (ordenados descendentemente) a partir del primer término.

Los polinomios:

$C(x; y) = 30x^{10}y^2 - 10xy^{10} - \frac{1}{2}x^2y^{11} + \frac{3}{2}x^7y^{20}$

Está ordenado en forma ascendente respecto a "y".

$D(x; y) = 2x^{57}y^{10} + 7x^{10}y^{30} - 2x^2 - 5y$

Está ordenado en forma descendente respecto a "x".

4. Polinomios idénticos

Dos polinomios son idénticos cuando sus términos correspondientes poseen coeficientes iguales.

Los polinomios: $Ax^2y + Bx^3y^4 + Cx^4y^5$

$Mx^2y - Nx^3y^4 + Px^4y^5$

Si son idénticos, se cumple: $A = M \wedge B = -N \wedge C = P$

Condición aprovechable de polinomios idénticos

Los valores numéricos de los polinomios para cualquier sistema de valores numéricos asignados a sus variables son iguales.

Ejemplo:

Sean: $m(x - 2) + n(x + 1) = 4x - 17$; calcula: m . n

Dando valores adecuadamente:

Para $x = 2 \Rightarrow m(2 - 2) + n(2 + 1) = 4(2) - 17 \Rightarrow n = -3$

Para $x = -1 \Rightarrow m(-1 - 2) + n(-1 + 1) = 4(-1) - 17 \Rightarrow m = 7$

5. Polinomio idénticamente nulo

Es aquel cuyos coeficientes son nulos; por lo tanto, estos polinomios se anulan para cualquier valor de la variable.

El polinomio: $P(x; y) = Ax^2y + Bxy^2 + Cx^3y^3 = 0$

Es idénticamente nulo, se cumple entonces: $A = B = C = 0$

Ejemplo:

Calcula el valor de a, b y c; si $P(x) = (a^3 - 8)x^6 + (b - a - 2)x + c - 3 = 0$

Como el polinomio es idénticamente nulo, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 8 = 0 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2 \\ b - a - 2 = 0 \Rightarrow b = a + 2 = 2 + 2 = 4 \\ c - 3 = 0 \Rightarrow c = 3 \end{array}\right\} \therefore a = 2, b = 4, c = 3$$

Nota

Debes saber que existen varios tipos de polinomios según su grado:

- Polinomio de grado cero: $P(x) = 10$
- Polinomio de primer grado: $P(x) = 7x + 3$
- Polinomio de segundo grado: $P(x) = x^2 + 3x + 1$
- Polinomio de tercer grado: $P(x) = 21x^3 + 4x^2 + x + 2$
- Polinomio de cuarto grado: $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 2$

Nota

A la variable de referencia también se le llama variable ordenatriz, donde sus exponentes aumentan o disminuyen.

Recuerda

- Para calcular el grado de un polinomio previamente se deben simplificar las expresiones algebraicas.
- Si solo se especifica GRADO, este se sobreentiende como el GRADO ABSOLUTO.
- Un polinomio completo NO necesariamente tiene que ser ordenado, y recíprocamente todo polinomio ordenado NO necesariamente tiene que ser completo.





Observación

Todo polinomio de grado "n" que se anula para más de "n" valores de la variable, es idénticamente nulo.

Problemas resueltos

1 ¿Cuánto vale la suma de coeficientes del siguiente polinomio?
$B(x) = (9x^7 - 2)^n + (10x^7 - 9)^{n-1} + (11x^5 - 4)^{n-2} + 50(4x^3 + 3)^{n-2}(7x - 8)$

Resolución:

La suma de coeficientes (Σ coef.) se determina como:

$$\Sigma\text{coef.}(B) = B(1) = (9(1)^7 - 2)^n + (10(1)^7 - 9)^{n-1} + (11(1)^5 - 4)^{n-2} + 50(4(1)^3 + 3)^{n-2}.(7(1) - 8)$$
$$= 7^n + 1^{n-1} + 7^{n-2} + 50 . 7^{n-2}(-1)$$
$$= 7^n + 7^{n-2} - 50 . 7^{n-2} + 1$$

Factorizamos: 7^n

$$= 7^n\left(1 + \frac{1}{49} - \frac{50}{49}\right) + 1$$
$$= 1$$

$\therefore\ \Sigma\text{coef.}(B) = 1$

2 Se multiplica n^n polinomios de grado $2n^n$ cada uno, el resultado es un polinomio completo. Calcula el número de términos del resultado de multiplicar los polinomios.

Resolución:

Se representan los polinomios de la siguiente manera:

n.° de polinomios	
1	A(x) ⇒ Grado de A(x) = GA(x) = $2n^n$
2	B(x) ⇒ Grado de B(x) = GB(x) = $2n^n$
3	C(x) ⇒ Grado de C(x) = GC(x) = $2n^n$
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮
n^n	N(x) ⇒ Grado de N(x) = GN(x) = $2n^n$

Multiplicamos los n^n polinomios:

$$P(x) = \underbrace{A(x) . B(x) . C(x) \ldots N(x)}_{n^n \text{ factores}}: \text{polinomio completo (dato)}$$

Grado de P(x): $GP(x) = \underbrace{2n^n + 2n^n + 2n^n + \ldots + 2n^n}_{n^n \text{ sumandos}} = n^n(2n^n)$

$\therefore\ GP(x) = 2n^{2n}$

3 Halla el valor de: $H = \dfrac{4n + 7p}{18m}$
Si: A(x) = 0
$A(x) = (x^3 + x^2 + 1)(m - 2n) + (x^3 + 2x^2 + 2)(3n - 4p) + (x^3 + 3x^2 + 3)(5p - 6m)$

Resolución:

Como es condición del problema que A(x) = 0; este también será nulo para cualquier valor de su variable:
Si x = 0 ⇒ A(0) = 0
Hallamos A(0):

$$A(0) = (0^3 + 0^2 + 1)(m - 2n) + (0^3 + 2(0)^2 + 2)(3n - 4p) + (0^3 + 3(0)^2 + 3)(5p - 6m) = 0$$
$$\Rightarrow (m - 2n) + 2(3n - 4p) + 3(5p - 6m) = 0$$

Operando y reduciendo términos semejantes obtenemos:

$$m - 2n + 6n - 8p + 15p - 18m = 0$$
$$-17m + 4n + 7p = 0$$
$$4n + 7p = 17m$$

Nos piden:

$$H = \frac{4n + 7p}{18m} = \frac{17m}{18m} = \frac{17}{18}$$

4 Halla: a + b, si el polinomio P(x; y) es homogéneo:
$P(x; y) = ax^{a^{a-5}} + by^{a^3} - cx^{b^{a+1}}$

Resolución:

$$P(x;y) = ax^{a^{a-5}} + by^{a^3} - cx^{b^{a+1}}$$

Como P es homogéneo, se cumple: $\underbrace{a^{a-5}}_{I} = \underbrace{a^3}_{II} = \underbrace{b^{a+1}}_{III}$

De (I) y (II):
$a^{a-5} = a^3 \Rightarrow a - 5 = 3 \Rightarrow a = 8$

De (II) y (III):
$a^3 = b^{a+1} \Rightarrow 8^3 = b^{8+1} \Rightarrow b^9 = (2^3)^3 = 2^9 \Rightarrow b = 2$

Nos piden:
a + b = 8 + 2 = 10

5 Si: P(x + 3) = 3x – 4
Halla: E = P(4) + P(7)

Resolución:

Hallamos: P(4)
Se sabe: P(x + 3) = 3x – 4
Entonces: x + 3 = 4 ⇒ x = 1
Reemplazamos: P(4) = 3(1) – 4 ⇒ P(4) = –1
Hallamos: P(7)
Se sabe: P(x + 3) = 3x – 4
Entonces: x + 3 = 7 ⇒ x = 4
Reemplazamos: P(7) = 3(4) – 4 ⇒ P(7) = 8
En E: E = –1 + 8 ⇒ E = 7

6 Si: P(x) = x + 7 ∧ P(F(x)) = 3x + 9
Halla: F(6)

Resolución:

Como P(x) = x + 7 ⇒ P(F(x)) = F(x) + 7
Entonces:
F(x) + 7 = 3x + 9 ⇒ F(x) = 3x + 2
F(6) = 3(6) + 2 ⇒ F(6) = 20

7 Si: $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$
Calcula: E = P(2) – P[P(1)]

Resolución:

$P(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 5 = 12 + 4 - 5 \Rightarrow P(2) = 11$
$P(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 5 = 3 + 2 - 5 \Rightarrow P(1) = 0$
$P[P(1)] = P(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 5 \Rightarrow P[P(1)] = -5$
$\Rightarrow P(2) - P[P(1)] = 11 - (-5) = 16$
$\therefore E = 16$



8 Sea el polinomio: $P(x) = x^2 + mx + 2n$
Si $TI(P) = 3$, además: $P(2) - P(-2) = 6$
Halla: $m + n$

Resolución:

$P(x) = x^2 + mx + 2n$ ...(I)

Dato:

- $TI(P) = 3 = 2n \Rightarrow n = \frac{3}{2}$
- $P(2) - P(-2) = 6$ ...(II)

En (I): $x = 2$
$\Rightarrow \; P(2) = 2^2 + 2m + 2n$ ...(α)

En (I): $x = -2$
$\Rightarrow \; P(-2) = (-2)^2 + m(-2) + 2n$
$P(-2) = 2^2 - 2m + 2n$ ...(β)

(α) y (β) en (II):
$(4 + 2m + 2n) - (4 - 2m + 2n) = 6$
$4m = 6 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Nos piden: $n + m = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

9 En el polinomio:
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, calcula: $\dfrac{P(x+1)}{x^2 - x + 1}$

Resolución:

Damos forma al polinomio:
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
$P(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 1$
$P(x) = (x - 1)^3 + 1$

Haciendo: $x \to x + 1$
$P(x + 1) = x^3 + 1$

Nos piden: $\dfrac{P(x+1)}{x^2 - x + 1} = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$

$= \dfrac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = x + 1$

10 Calcula: (abc)
Si: $ax^2 - 2y^2 + bxy = 3x^2 + cy^2 - 5xy$

Resolución:

$ax^2 - 2y^2 + bxy = 3x^2 + cy^2 - 5xy$

$\Rightarrow a = 3;\ c = -2;\ b = -5$ $\quad \therefore\ abc = 30$

11 Halla el grado de P(x):
$P(x) = (x + 1)(x^2 + 2)(x^3 + 3)\ldots(x^6 + 6)$

Resolución:

$P(x) = (x + 1)(x^2 + 2)(x^3 + 3)\ \ldots(x^6 + 6)$

Recuerda que el grado en una multiplicación se calcula sumando los grados de cada uno de los factores.

Grado de $P(x) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 6 = \dfrac{6(7)}{2} = 21$

12 Encuentra el grado del siguiente polinomio homogéneo:
$P(x; y) = x^3y^{n+2} + 5x^ny^{m-1} - 3y^{m+3}$

Resolución:

Del dato, P(x; y) es un polinomio homogéneo.
$\Rightarrow 3 + (n + 2) = n + (m - 1) = m + 3$
$n + 5 = n + m - 1 = m + 3$
$\Rightarrow n + 5 = n + m - 1 \wedge n + m - 1 = m + 3$
$5 = m - 1 \qquad n - 1 = 3$
$m = 6 \qquad n = 4$
$\therefore\ GA(P) = 3 + n + 2 = 9$

13 Calcula el grado relativo a z en el siguiente monomio:

$$M(x; y; z) = \frac{x^{5a-1}y^{2a+2}z^{3a+3}}{x^{3-a}y^{a-5}z^{4-2a}}$$

Si el grado relativo a x es 20.

Resolución:

$M = x^{5a-1-(3-a)}y^{2a+2-(a-5)}z^{3a+3-(4-2a)}$
$GR(x) = 5a - 1 - 3 + a = 20$
$6a - 4 = 20 \Rightarrow a = 4$
Piden: $GR(z) = 3a + 3 - 4 + 2a$
$GR(z) = 5a - 1 = 5(4) - 1$
$\therefore\ GR(z) = 19$

14 El monomio es de grado absoluto 4, y los grados relativos a **x** e **y** son iguales:

$$M(x; y) = x^{\frac{b}{a}}y^{\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{b}}y^{\frac{b}{a}}$$

Calcula: $E = 3b - 2a$

Resolución:

$M(x; y) = x^{\frac{b}{a}}y^{\frac{1}{a}}x^{\frac{1}{b}}y^{\frac{b}{a}} \Rightarrow M(x; y) = x^{\frac{b}{a}+\frac{1}{b}}y^{\frac{b}{a}+\frac{1}{a}}$

Del dato: $GA(M) = 4$

Luego: $\frac{b}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{a} = 4$

$\Rightarrow \frac{2b}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 4$ ...(1)

Además: $GR(x) = GR(y)$
$\frac{b}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow a = b$

Reemplazando en (1):
$\frac{2b}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow b = 1$
$\therefore\ E = 3b - 2a = 1$

PRODUCTOS NOTABLES

CONCEPTO

Son aquellos productos que se pueden determinar directamente, sin necesidad de efectuar la operación de multiplicación.

> **Recuerda**
>
> $(x - y)^2 = (y - x)^2$
>
> De:
> $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ ...(α)
> $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$ ...(β)
>
> Al multiplicar α y β obtenemos:
>
> $(x + y)^4 - (x - y)^4 = 8xy(x^2 + y^2)$



PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Trinomio cuadrado perfecto (tcp)

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Ejemplo:

- $(a^a + b^b)^2 = (a^a)^2 + 2(a^a)(b^b) + (b^b)^2$
  $= a^{2a} + 2a^ab^b + b^{2b}$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Ejemplo:

- $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2(a)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2$
  $= a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$

Corolario: identidades de Legendre:

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Ejemplo:

- $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 2\left[(a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2\right]$
  $= 2\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right)$

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

Ejemplo:

- $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 4(a^2)\left(\frac{1}{a^2}\right)$
  $= 4$

2. Diferencia de cuadrados

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Ejemplos:

- $(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1) = (\sqrt[3]{3})^2 - 1^2$
  $= \sqrt[3]{9} - 1$
- $\left(3x^2 + \frac{1}{y}\right)\left(3x^2 - \frac{1}{y}\right) = (3x^2)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2 = 9x^4 - \frac{1}{y^2}$
- $\left(\frac{1}{x^x} + 1\right)\left(\frac{1}{x^x} - 1\right) = \frac{1}{x^{2x}} - 1$

> **Observación**
>
> En algunos casos nos será útil descomponer la diferencia de cuadrados.
>
> $49x^2 - 100 = (7x)^2 - (10)^2$
> $= (7x + 10)(7x - 10)$



3. Identidad de Steven (multiplicación de binomios con un elemento común)

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplos:

- $(x^a + 7)(x^a - 9) = (x^a)^2 + (7 + (-9))x^a + 7(-9)$
  $= x^{2a} - 2x^a - 63$
- $(m - 10)(m - 3) = m^2 + ((-10) + (-3))m + (-10)(-3)$
  $= m^2 - 13m + 30$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Ejemplo:

- $(3x - 2)(2x - 1) = (3)(2)x^2 + (3(-1) + (2)(-2))x + (-2)(-1)$
  $= 6x^2 + (-3 - 4)x + 2$
  $= 6x^2 - 7x + 2$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

Ejemplo:

- $(x + 2)(x - 1)(x - 7) = x^3 + (2 + (-1) + (-7))x^2 + (2(-1) + 2(-7) + (-1)(-7))x + 2(-1)(-7)$
  $= x^3 + (-6)x^2 + (-2 - 14 + 7)x + 14 = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$



4. Binomio al cubo

Binomio suma al cubo

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ejemplo:

- $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 + (3b)^3$
  $= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

Binomio diferencia al cubo

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Ejemplo:

- $\left(\frac{1}{a} - a\right)^3 = \left(\frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{a}\right)^2 a + 3\left(\frac{1}{a}\right)a^2 - a^3$
  $= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a} + 3a - a^3$

Nota

Identidades de Cauchy (forma abreviada del binomio al cubo)

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

5. Binomio por trinomio

Suma de cubos

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

Ejemplo:

- $(7a + 2b)(49a^2 - 14ab + 4b^2)$
  $= (7a + 2b)((7a)^2 - (7a)(2b) + (2b)^2) = (7a)^3 + (2b)^3$
  $= 343a^3 + 8b^3$

Diferencia de cubos

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

Ejemplo:

- $(m^3 - n)(m^6 + m^3n + n^2)$
  $= (m^3 - n)((m^3)^2 + (m^3)n + n^2) = (m^3)^3 - n^3$
  $= m^9 - n^3$

6. Trinomio al cuadrado

Forma desarrollada

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Ejemplo:

- $(a + 2b - c^2)^2 = a^2 + (2b)^2 + (-c^2)^2 + 2(a)(2b) + 2(a)(-c^2) + 2(2b)(-c^2)$
  $= a^2 + 4b^2 + c^4 + 4ab - 2ac^2 - 4bc^2$



Forma abreviada

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

Ejemplo:

- $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{x}{z}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{z}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{z}\right)\right)$
  $= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(-1 - \frac{x^2}{yz} + \frac{y}{z}\right)$

Recuerda

$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x(x^2 + 3y^2)$

$(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y(y^2 + 3x^2)$

7. Identidades de Lagrange

Con dos variables: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

Ejemplos:

- $(m^2 + 9)(x^2 + 4) = (m^2 + 3^2)(x^2 + 2^2) = (mx + 3(2))^2 + (2m - 3x)^2 = (mx + 6)^2 + (2m - 3x)^2$
- $(n^2 + 49)(z^2 + 16) = (n^2 + 7^2)(z^2 + 4^2) = (nz + 7(4))^2 + (4n - 7z)^2 = (nz + 28)^2 + (4n - 7z)^2$

8. Identidades de Argand

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

Ejemplo:

- $((a + b)^2 + (a + b) + 1)((a + b)^2 - (a + b) + 1) = (a + b)^4 + (a + b)^2 + 1$

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

Ejemplo:

- $\left(\frac{1}{a^2} + 1 + a^2\right)\left(\frac{1}{a^2} - 1 + a^2\right) = \frac{1}{a^4} + 1 + a^4$

Atención

En forma general se puede expresar la identidad de Argand como:

$(x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$
$= x^{4n} + x^{2n} + 1$



9. Identidades de Gauss (identidades auxiliares)

- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$
- $(x + y)(y + z)(x + z) + xyz = (x + y + z)(xy + xz + yz)$

Problemas resueltos

1 Efectúa:
$A = (x^2 + \sqrt{x^4 - 8})(x^2 - \sqrt{x^4 - 8})$

Resolución:

$A = (x^2 + \sqrt{x^4 - 8})(x^2 - \sqrt{x^4 - 8})$

$A = x^4 - (\sqrt{x^4 - 8})^2$

$A = x^4 - (x^4 - 8) = x^4 - x^4 + 8 = 8$

2 Efectúa:
$R = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 16}} . \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 16}}$

Resolución:

$R = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - 16})(a - \sqrt{a^2 - 16})}$

Por diferencia de cuadrados:

$R = \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - 16})^2}$

$R = \sqrt{a^2 - a^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$

3 Si: $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$

Calcula: $P = \sqrt{x^2 + x^{-2} - 1}$

Resolución:

$(x + x^{-1})^2 = (2\sqrt{3})^2$

$x^2 + 2\underbrace{x.x^{-1}}_{1} + x^{-2} = 12 \Rightarrow x^2 + x^{-2} = 10$

Nos piden: $P = \sqrt{x^2 + x^{-2} - 1} = \sqrt{10 - 1} = 3$

4 Dado: $\begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 10 \end{cases}$

Calcula: $M = \sqrt{a^2 + b^2 + ab - 1}$

Resolución:

$(a + b)^2 = (6)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2\underbrace{ab}_{10} = 36 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16$

Nos piden:

$M = \sqrt{a^2 + b^2 + ab - 1} = \sqrt{16 + 10 - 1}$

$M = \sqrt{25} = 5$

5 Calcula:
$N = \sqrt{\sqrt{13} + 1} . \sqrt{\sqrt{13} - 1} - 2(\sqrt{3} - 8)$

Resolución:

$N = \sqrt{(\sqrt{13} + 1)(\sqrt{13} - 1)} - 2\sqrt{3} + 16$

$N = \sqrt{\sqrt{13}^2 - 1^2} - 2\sqrt{3} + 16$

$N = \sqrt{12} - 2\sqrt{3} + 16 \Rightarrow N = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 16$

$N = 16$

6 Calcula:
$M = \sqrt[8]{24(5^2 + 1)(5^4 + 1) + 1}$

Resolución:

$M = \sqrt[8]{\underbrace{24}_{25 - 1}(5^2 + 1)(5^4 + 1) + 1}$

$M = \sqrt[8]{\underbrace{\underbrace{(5^2 - 1)(5^2 + 1)}_{(5^4 - 1)}(5^4 + 1)}_{(5^8 - 1)} + 1}$

$M = \sqrt[8]{5^8 - 1 + 1} = \sqrt[8]{5^8} = 5$

7 Calcula:
$N = (2\sqrt{6} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$

Resolución:
Aplicamos diferencia de cuadrados:

$N = \underbrace{(2\sqrt{6} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})}\underbrace{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$

$N = [(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2][(\sqrt{3})^2 - 1^2]$

$N = (4 \times 6 - 3)(3 - 1) \Rightarrow N = 21 \times 2 = 42$

8 Calcula:
$E = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{18})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{18})^2}{(2\sqrt{3})^2}$

Resolución:
Aplicamos Legendre:

$E = \frac{4\sqrt{8}\sqrt{18}}{4 \times 3} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow E = 2\sqrt{2}^2 = 4$

9 Efectúa:
$Y = (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$

Resolución:
Dando forma:

$Y = (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{7}^2 + \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2)$

Se observa una diferencia de cubos:

$Y = \sqrt[3]{7}^3 - \sqrt[3]{3}^3 = 7 - 3 = 4$

10 Calcula:
$E = (3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Resolución:
Aplicamos diferencia de cuadrados:

$E = \underbrace{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})}\underbrace{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$

$E = [(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2][\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2]$

$E = (9 \times 2 - 3)(6 - 2) \Rightarrow E = 15 \times 4 = 60$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

CONCEPTO

El objetivo principal es calcular el **cociente** y el **residuo** a partir de dos polinomios denominados **dividendo** y **divisor.**

Identidad de Euclides:

$$D(x) = d(x)Q(x) + R(x)$$

Donde:
D(x): dividendo — d(x): divisor
Q(x): cociente — R(x): Resto

TÉCNICAS PARA DIVIDIR

1. Método clásico

Pasos:

a) Dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor obteniéndose el primer término del cociente. Luego este se multiplica por cada uno de los términos del divisor cuyo resultado se resta del dividendo.

b) Bajar el siguiente término del dividendo y repetir el paso anterior tantas veces hasta que el grado del resto sea a lo más uno menos que el grado del divisor o que sea cero.

Ejemplo: divide $\dfrac{x^4 - 15 - 13x^2 - 30x}{3x + x^2 + 5}$

Resolución:

Ordenando y completando: $\dfrac{x^4 + 0x^3 - 13x^2 - 30x - 15}{x^2 + 3x + 5}$

Luego:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & -13x^2 & -30x & -15 & x^2+3x+5 \\
-x^4 & -3x^3 & -5x^2 & & & x^2-3x-9 \\
 & -3x^3 & -18x^2 & -30x & & \\
 & +3x^3 & +9x^2 & +15x & & \\
 & & -9x^2 & -15x & -15 & \\
 & & +9x^2 & +27x & +45 & \\
 & & & 12x & +30 &
\end{array}$$

De donde:

$$\underbrace{\overbrace{(x^4 - 13x^2 - 30x - 15)}^{D(x)}}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{\overbrace{(x^2 + 3x + 5)}^{d(x)}}_{\text{Dividisor}}\underbrace{\overbrace{(x^2 - 3x - 9)}^{Q(x)}}_{\text{Cociente}} + \underbrace{\overbrace{(12x + 30)}^{R(x)}}_{\text{Residuo o resto}}$$

2. Método de Horner

Es un método general de resolución de división de polinomios que considera de los polinomios sus coeficientes y/o constantes convenientemente asumidas.

Horner invertido

Es un caso especial que como su nombre lo indica se hace el intercambio solo de los coeficientes, de tal manera que la división se haga más simple.

Criterio de resolución:

- Usar este método cuando las constantes estén como primeros coeficientes.
- Y lo **principal**: es que la división sea exacta no importa el grado de los polinomios dividendo y divisor.

Ejemplo: si la siguiente división: $\dfrac{ax^4 + bx^3 - 2x + 4}{4x^2 - 3x + 2}$ es exacta, halla: 2a + b

Resolución:

- Haciendo el procedimiento comúnmente conocido, no olvidar completar con cero el término cuadrático:

4	a	b	0	−2	4
+3		$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$		
−2			$3\left(\frac{\frac{3a}{4}+b}{4}\right)$	$-2\left(\frac{\frac{3a}{4}+b}{4}\right)$	
	$\frac{a}{4}$	$\frac{\frac{3a}{4}+b}{4}$			

Operaciones muy laboriosas

Atención

Respecto a los grados de los polinomios en la división, se cumple:

$$°[D(x)] \geq °[d(x)] \geq 1$$
$$°[R(x)] < °[d(x)]$$



Recuerda

Para poder dividir dos polinomios, estos deben encontrarse **completos y ordenados.**

Ejemplos:

$x^3 + x - 2 = \underbrace{x^3 + 0x^2 + x - 2}_{\text{completo y ordenado}}$

$x - x^3 + 2x^2 = \underbrace{-x^3 + 2x^2 + x + 0}_{\text{completo y ordenado}}$



- Empleamos Horner invertido:

$$\frac{ax^4 + bx^3 + 0x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 3x + 2} = \frac{4x^4 - 2x^3 + 0x^2 + bx + a}{2x^2 - 3x + 4}$$

2	4	–2	0	b	a
+3		6	–8		
–4			6	–8	
				–3	4
	2	2	–1	0	0

Operaciones más simples

0 → 0 → Por ser división exacta

De la zona del resto:
$b - 8 - 3 = 0 \Rightarrow b = 11$
$a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$

Nos piden: $2a + b = 2(-4) + 11 = 3$
$\therefore\ 2a + b = 3$

Recuerda

El esquema de Horner:

D I V I S O R — Mismo signo / Signo cambiado — DIVIDENDO — COCIENTE — RESTO

3. Método de Ruffini

No olvidar que el divisor binomio toma las formas: $ax \pm b$ o $ax^n \pm b$

Si el divisor es $ax^n \pm b \Rightarrow$ hacemos: $x^n = y$

Ejemplo: en la división $\dfrac{ax^{51} + 2bx + 2b - a}{x - 1}$, la suma de coeficientes del cociente es:

Resolución:

- Completamos el dividendo:

$$D(x) = \underbrace{ax^{51} + 0x^{50} + 0x^{49} ... + 0x^2 + 2bx^1}_{\text{Hay 51 términos}} + \underbrace{(2b - a)}_{\text{Término independiente}}$$

Observa los exponentes de x, aumentan de 1 en 1 de derecha a izquierda.

- Luego; en el esquema de Ruffini:

$x - 1 = 0$	a	0	0	...	0	0	2b	(2b – a)
$x = 1$		a	a	...	a	a	a	(2b + a)
×	a	a	... a	...	a	a	(2b + a)	4b

$ax^{50} + ax^{49} + ax^{48} + ... + ax + 2b + a$
Cociente de 51 términos

- Sumamos los coeficientes del cociente:
$\Sigma coef.Q(x) = a + a + a + ... + a + a + (2b + a) = 51a + 2b$

Recuerda

El esquema de Ruffini:

DIVIDENDO — $x^n = \mp\frac{b}{a}$ — RESTO — COCIENTE — Coeficiente principal del divisor

TEOREMA DEL RESTO

Nos permite obtener el resto de una división sin efectuarlas.

Enunciado de Descartes: Sea: $\dfrac{P(x)}{ax \pm b}$ una división polinómica $\Rightarrow R(x) = P\left(\mp\dfrac{b}{a}\right)$

Regla práctica:

1. El divisor igualamos a cero: $ax \pm b = 0$
2. Despejamos la variable: $x = \mp\dfrac{b}{a}$



Casos a presentarse:

i. Si: $ax^n \pm b = 0 \Rightarrow x^n = \mp\frac{b}{a}$

ii. Si: $ax^n \pm bx^{n-1} \pm c = 0 \Rightarrow ax^n \pm bx^{n-1} = \mp c$

iii. Si: $ax^n \pm bx \pm c = 0 \Rightarrow ax^n \pm bx = \mp c$

iv. Si: $x + y + z = a \Rightarrow x + y = a - z$

3. Reemplazamos el valor de x; x^n; $ax^n \pm bx^{n-1}$; $ax^n \pm bx$; x + y en el polinomio (dividendo) y efectuamos; el valor obtenido es el **resto** de la división.

Ejemplo:

Calcula el resto de: $\dfrac{x(x+2)(x-3)(x+5)+x+20}{x^2+2x-2}$

Resolución:

Regla práctica:

caso ii: $ax^n \pm bx^{n-1} \pm c = x^2 + 2x - 2 = 0$

1. El divisor igualamos a cero: $x^2 + 2x - 2 = 0$
2. Despejamos la expresión: $x^2 + 2x = 2$
3. Reemplazamos en el dividendo:

Buscamos la expresión: $x^2 + 2x$

$D(x) = x(x+2)(x-3)(x+5) + x + 20$

$= \underbrace{(x^2+2x)}_{2}\underbrace{(x^2+2x}_{2} - 15) + x + 20$

$R(x) = 2(2 - 15) + x + 20 = 2(-13) + x + 20$

$= -26 + x + 20 \qquad \therefore\ R(x) = x - 6$

Recuerda

- Usamos el método de Horner cuando el divisor es de grado mayor o igual a 2.
- Usamos el método de Ruffini cuando el divisor es lineal (grado 1).



DIVISIBILIDAD

$$P(x) \text{ es divisible por } d(x) \Longleftrightarrow \underbrace{P(x) = d(x)Q(x)}_{\text{División exacta}} \Rightarrow R(x) = 0$$

Teoremas:

I. Si: P(x) se anula para x = a: P(a) = 0
$\Rightarrow$ P(x) es divisible por (x – a):



$P(x) = (x - a)Q(x)$ Observación: x = a es un cero o raíz de P(x).

II. Si: $P(x) = (x-a)Q_1(x) \Rightarrow R(x) = 0$
$P(x) = (x-b)Q_2(x) \Rightarrow R(x) = 0$
$P(x) = (x-c)Q_3(x) \Rightarrow R(x) = 0$



$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) \Rightarrow R(x) = 0$

El proceso inverso también se cumple.

III. Si al dividir un polinomio P(x) por diferentes expresiones: $d_1(x)$, $d_2(x)$ nos da un mismo resto, entonces al dividir dicho polinomio por el producto de ellos también nos dará el mismo resto común.

$P(x) = d_1(x)Q_1(x) + R(x)$

$P(x) = d_2(x)Q_2(x) + R(x)$

$\Rightarrow P(x) = d_1(x)d_2(x)Q(x) + R(x)$

IV. Si al dividendo y al divisor se le multiplica o divide por una misma cantidad o expresión, el cociente no se altera, pero el resto queda multiplicado o dividido por dicha cantidad.

Sea: $P(x) = d(x)Q(x) + R(x)$

Si: $\left(\dfrac{P(x)}{H(x)}\right) = \left(\dfrac{d(x)}{H(x)}\right)Q(x) + \left(\dfrac{R(x)}{H(x)}\right)$; $H(x) \neq 0 \Rightarrow$

Q(x): no se altera
Resto: $\dfrac{R(x)}{H(x)}$

Nota

A los divisores se les llama también factores.



Ejemplo:

Un polinomio P(x) de cuarto grado al ser dividido separadamente por $(x^2 + x + 1)$ y $(x^2 - x + 2)$ se obtiene el mismo residuo (3x – 5), pero al dividirlo por (x + 1) es 12, calcula P(0).

Resolución:

- Del enunciado:
  $P(x) = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + (3x - 5)$
  $P(x) = (x^2 - x + 2)Q_2(x) + (3x - 5)$
- Por el teorema tres (III) de la divisibilidad:
  $\underbrace{P(x)}_{4.^\circ\text{ grado}} = \underbrace{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2)}_{4.^\circ\text{ grado}}\underbrace{Q(x)}_{k} + (3x - 5)$ ...(1)
- Luego nos dicen:
  $P(x) = (x + 1)Q_3(x) + 12$ ...(2)
- Reemplazando x = – 1:
  En (1):
  $P(-1) = ((-1)^2 + (-1) + 1)((-1)^2 - (-1) + 2)k + (3(-1) - 5)$
  $P(-1) = 4k - 8$

En (2): $P(-1) = (-1 + 1)Q_3(x) + 12$
$= 0 + 12$
$P(-1) = 12$

Entonces = 4k – 8 = 12 ⇒ k = 5

k en (1):
$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2)5 + (3x - 5)$

- Nos piden:
  $P(0) = (0^2 + 0 + 1)(0^2 - 0 + 2)5 + (3(0) - 5)$
  $= 10 - 5$
  $\therefore\ P(0) = 5$

Problemas resueltos

1 Calcula: $\frac{a-b}{17}$ en la división $\frac{ax^9 + bx^8 + 1}{x^2 - 2x + 1}$, si es exacta.

Resolución:

Recordar que una división es exacta $\iff$ R(x) = 0

Completamos el dividendo con ceros, luego por Horner invertido:

1	1	0	0	0	0	0	0	0	b	a
+2		2	–1							
–1			4	–2						
				6	–3					
					8	–4				
						10	–5			
							12	–6		
								14	–7	
									16	–8
	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0

En la zona del resto:

$b - 7 + 16 = 0 \Rightarrow b = -9$

$a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

Nos piden:

$$\frac{a-b}{17} = \frac{8-(-9)}{17} = \frac{17}{17}$$

$$\therefore\ \frac{a-b}{17} = 1$$

2 Calcula: a + b + c si la siguiente división es exacta, y c es el término independiente (TI) del cociente.

$$\frac{-bx^5 - ax^4 - 6x^3 - 13x^2 - 6x + 6}{-5x^2 - 2x + 2}$$

Resolución:

Según el criterio se observa las constantes como primeros coeficientes, luego se aplica Horner invertido:

$$\frac{6x^5 - 6x^4 - 13x^3 - 6x^2 - ax - b}{2x^2 - 2x - 5}$$

2	6	–6	–13	–6	–a	–b
+2		6	15			
+5			0	0		
				2	5	
					–4	–10
	3	0	1	–2 (TI)	0	0 → División exacta (dato)

Observamos del cociente: c = –2 (Término independiente)

De la zona del resto:

$-a + 5 - 4 = 0 \ \wedge\ -b - 10 = 0$

$a = 1 \qquad b = -10$

Luego: $a + b + c = 1 + (-10) + (-2) = -11$

$\therefore\ a + b + c = -11$

3 Determina la suma de los coeficientes del cociente de:

$$\frac{4x^{25} - 2x^{24} + 6x^2 + 2x - 7}{2x - 2}$$

Resolución:

Completamos en forma abreviada el dividendo:

$$D(x) = \underbrace{4x^{25} - 2x^{24} + 0x^{23} + 0x^{22} + \dots + 6x^2 + 2x^1}_{25\text{ términos}} - 7$$

"Los exponentes de x disminuyen de 1 en 1"

Por Ruffini, consideramos solo coeficientes:

2x – 2 = 0	4	–2	0	0	...	0	0	6	2	–7
$x = \frac{2}{2}$		4	2	2	...	2	2	2	8	10
÷2	4	2	2	2	...	2	2	8	10	3
	2	1	1	1	...	1	1	4	5	

25 términos

$$\Sigma\text{coef.}Q(x) = 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{22\text{ términos}} + 4 + 5$$

$= 11 + 22(1)$

$\therefore\ \Sigma\text{coef.}Q(x) = 33$

4 Halla el cociente de la siguiente división:

$$\frac{512x^9 - 1}{2x - 1}$$

Da como respuesta la suma de sus coeficientes.

Resolución:

Tener en cuenta que $512 = 2^9$, completamos con ceros los términos que faltan:

2x – 1 = 0	2^9	0	0	0	0	0	0	0	0	–1
$x = \frac{1}{2}$		2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1
÷2	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	0
	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	1	

$$\Sigma\text{coef.}Q(x) = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$$

Por cocientes notables:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

Luego, la suma de coeficientes tomaría la forma:

$$\Sigma\text{coef. }Q(x) = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{512 - 1}{1} = 511$$

$\therefore\ \Sigma\text{coef. }Q(x) = 511$



5 Halla el resto de:

$$\frac{(x^4-3x+6)^{102}+(x^4-3x+4)^{53}-2x^4+6x-14}{x^4-3x+5}$$

Resolución:

Usamos el teorema del resto.
Igualamos a cero el divisor: $x^4-3x+5=0$
Despejamos la expresión: $x^4-3x=-5$
Reemplazamos el valor de (x^4-3x) en el dividendo:
$D(x)=((x^4-3x)+6)^{102}+((x^4-3x)+4)^{53}-2(x^4-3x)-14$
$R(x)=(-5+6)^{102}+(-5+4)^{53}-2(-5)-14$
$=1^{102}+(-1)^{53}+10-14$
$=1-1+10-14=-4$
$\therefore\ R(x)=-4$

6 Halla el resto de:

$$\frac{(x+y)^2+(x+y)(2z-1)+z(z-1)}{x+y+z-3}$$

Resolución:

Igualamos a cero el divisor: $x+y+z-3=0$
Despejamos la expresión: $x+y=3-z$

Reemplazamos el valor de $(x+y)$ en el dividendo:
$D(x)=(x+y)^2+(x+y)(2z-1)+z(z-1)$
$R(x)=(3-z)^2+(3-z)(2z-1)+z^2-z$
$=9-6z+z^2+6z-3-2z^2+z+z^2-z$

Reducimos términos semejantes:
$R(x)=9-3=6$
$\therefore\ R(x)=6$

7 El polinomio: $P(x)=x^4+ax^3-9x^2+bx+49$ al ser dividido entre $(x+1)$ deja como resto 60; además, al ser dividido entre $(x+3)$, el resto es 82; halla el valor de $a+b$.

Resolución:

Nos dicen:
$P(x)=(x+1)Q_1(x)+60 \Rightarrow P(-1)=60$
$P(x)=(x+3)Q_2(x)+82 \Rightarrow P(-3)=82$

Evaluamos el polinomio para: $x=-1$ y $x=-3$
$P(-1)=(-1)^4+a(-1)^3-9(-1)^2+b(-1)+49=60$ ...(i)
$P(-3)=(-3)^4+a(-3)^3-9(-3)^2+b(-3)+49=82$ ...(ii)

Operamos adecuadamente y obtenemos de (i) y (ii):

$a+b=-19$ ...(iii)
$9a+b=-11$ ...(iv) $(-)$

(iv – iii): $8a=8$
$\Rightarrow a=1 \wedge b=-20$

$\therefore\ a+b=1-20=-19$

8 Determina el valor de m del trinomio $3x^2+mx+9$ con la condición de que al dividir este por $x+2$ dé el mismo resto que la división del polinomio $2x^3+3x+3$ por dicho binomio.

Resolución:

De acuerdo al enunciado:
$3x^2+mx+9=(x+2)Q_1(x)+R(x)$
$2x^3+3x+3=(x+2)Q_2(x)+R(x)$

Para $x=-2$ se igualan los polinomios:
$3(-2)^2+m(-2)+9=2(-2)^3+3(-2)+3$
$3(4)-2m+9=2(-8)-6+3$
$12+9-2m=-16-3$
$21+19=2m$
$40=2m$
$\therefore\ m=20$

9 El polinomio $P(x)=mx^3+nx^2+px+q$ al ser dividido por $(x+2)$ deja como resto 10; pero al ser dividido por $(x-3)$, deja como resto 15. Calcula el resto de $P(x)$ al ser dividido por $(x-3)(x-2)$.

Resolución:

$P(x)=(x+2)Q_1(x)+10$ ...(I)
$P(x)=(x-3)Q_2(x)+15$ ...(II)
$P(x)=(x+2)(x-3)Q_3(x)+R(x)$ ...(III)
La forma que tendrá R(x):
$R(x)=ax+b$ ...(IV)
En (I) ∧ (II):
$P(-2)=10 \wedge P(3)=15$
En (III) ∧ (IV):
$P(-2)=R(-2)\Rightarrow 10=a(-2)+b$
$10=-2a+b$ ...(V)
$P(3)=R(3)\Rightarrow 15=3a+b$ ...(VI)
De (V) ∧ (VI):
$5=5a\Rightarrow a=1$
$\Rightarrow b=12$
$\therefore R(x)=x+12$

10 Determina el valor de n, si:

$\dfrac{(x+4)^{2n}+2^n}{x^2+8x+12}$, tiene como resto 20.

Resolución:

Igualamos a cero el divisor: $x^2+8x+12=0$
$x^2+8x=-12$
Pertenece al caso III:
$ax^n \pm bx \pm c$
Reemplazamos el valor de (x^2+8x) en el dividendo, buscando tal expresión:
$(x+4)^{2n}+2^n$
$\Rightarrow (\underbrace{x^2+8x}_{-12}+16)^n+2^n$
$\Rightarrow (-12+16)^n+2^n=20$ (dato)
$4^n+2^n=20$
$4^n+2^n=4^2+2^2$
$\therefore n=2$

COCIENTES NOTABLES

DEFINICIÓN DE COCIENTE NOTABLE (CN)

Son aquellos cocientes que se pueden obtener en forma directa sin necesidad de efectuar la operación de la división. Las divisiones indicadas que dan origen a estos cocientes notables son de la forma:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a};\ n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

Condición: para que una división sea exacta, el residuo debe ser nulo: $R(x) = 0$

Propiedades:

1. En: $\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$; el número de términos del cociente será **n**.

2. Si: $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$; es un cociente notable, se cumple: $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ = n.° de términos del cociente.

FÓRMULAS DE LOS COCIENTES NOTABLES

Primer caso: para **n** par o impar siempre es una división exacta.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1}$$

Ejemplos:

1. $\frac{x^4 - 16}{x - 2} = \frac{x^4 + (2)^4}{x - 2}$
$= x^3 + x^2(2) + x(2)^2 + 2^3$
$= x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

2. $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = \frac{x^5 - (1)^5}{x - 1}$
$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Segundo caso: para **n impar**, es una división exacta.

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... + a^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^7 + 128}{x + 2} = \frac{x^7 + 2^7}{x + 2} = x^6 - x^5(2) + x^4(2)^2 - x^3(2)^3 + x^2(2)^4 - x(2)^5 + 2^6$$
$$= x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$$

Tercer caso: para **n par**, es una división exacta.

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... - a^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^8 - 256}{x + 2} = \frac{x^8 - 2^8}{x + 2} = x^7 - x^6(2) + x^5(2)^2 - x^4(2)^3 + x^3(2)^4 - x^2(2)^5 + x(2)^6 - 2^7$$
$$= x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 64x - 128$$

TÉRMINO GENERAL (t_k)

Se llama así a un término cualquiera del cociente notable (CN) y se representa por t_k. La fórmula para obtener el término general de $\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$ es:

$$t_k = \pm x^{n-k}a^{k-1}$$

Donde:
k: lugar del término.
x; a: términos del divisor.
n: exponente que se repite en el dividendo.

Atención

$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

Es la forma general de un cociente notable (CN).



Atención

En el desarrollo de:

$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

- El exponente de **x** disminuye de 1 en 1 a partir de n – 1 hasta cero y el exponente de **a** aumenta de 1 en 1 hasta (n – 1), esto lo comprobamos en los ejemplos de cada caso.
- El GA de cualquier término del CN es: n – r



Nota

- En el 1.er caso, los signos de los términos son: $\frac{-}{-} = + + + ... + +$
- En el 2.° caso, los signos de los términos son: $\frac{+}{+} = + - + ... - +$
- En el 3.er caso, los signos de los términos son: $\frac{-}{+} = + - + ... + -$



Ejemplos:

1. Dado el cociente notable: $\dfrac{x^7 + a^7}{x + a}$; halla el t_6.

   Resolución:
   Vemos que tiene la forma de cociente notable, además el divisor es de la forma (x + a), como k es par, entonces: $t_6 = -x^{7-6}a^{6-1} = -xa^5$

2. Calcula el t_{17} en: $\dfrac{x^{120} - y^{180}}{x^2 - y^3}$

   Resolución:
   Observamos que no tiene la forma de cociente notable, entonces lo transformamos:
   $\dfrac{x^{120} - y^{180}}{x^2 - y^3} = \dfrac{(x^2)^{60} - (y^3)^{60}}{x^2 - y^3}$; donde n = 60
   Notamos que el divisor tiene la forma (x – a), entonces: $t_{17} = +(x^2)^{60-17}(y^3)^{17-1} \Rightarrow t_{17} = x^{86}y^{48}$

Observación

Convención de signos
- Si el divisor del CN es de la forma (x – a):
  $\Rightarrow t_k = +x^{n-k}a^{k-1}$ siempre positivo
- Si el divisor del CN es de la forma (x + a):
  $\Rightarrow t_k = +x^{n-k} . a^{k-1}$ (para k impar)
  $t_k = -x^{n-k} . a^{k-1}$ (para k par)



Observaciones:

Del cociente notable: $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

1. Si n = n.° impar, entonces hay un término central (tc):

   $tc = t_{\frac{n+1}{2}}$; n: número de términos

   Ejemplo:
   Halla el término central del CN:
   $$\frac{x^{19} + y^{38}}{x + y^2}$$
   Resolución:
   Hallamos el número de términos del CN:
   $$n = \frac{19}{1} = \frac{38}{2} = 19$$
   Notamos que n es impar, entonces:
   $tc = t_{\frac{n+1}{2}} = t_{\frac{19+1}{2}} = t_{10}$

   Reemplazamos:
   $tc = t_{10} = -x^{n-k}(y^2)^{k-1}$
   $tc = -x^{19-10}(y^2)^{10-1} = -x^9 . y^{18}$
   $\therefore tc = -x^9 . y^{18}$

2. Si n = n.° par, entonces hay dos términos centrales:

   $tc_1 = t_{\frac{n}{2}}$ $\wedge$ $tc_2 = t_{\frac{n}{2}+1}$

   Ejemplo:
   Halla el término central del siguiente CN:
   $$\frac{x^{24} - x^{60}}{x^2 - y^5}$$
   Resolución:
   El número de términos del CN:
   $$n = \frac{24}{2} = \frac{60}{5} = 12$$
   Notamos que n es par, entonces:
   $tc = t_{\frac{n}{2}} \wedge tc = t_{\frac{n}{2}+1}$

   $tc = t_{\frac{12}{2}} = t_6 \wedge tc = t_{\frac{12}{2}+1} = t_7$

   Reemplazamos:
   $tc = t_6 = (x^2)^{12-6}(y^5)^{6-1} \wedge tc = t_7 = (x^2)^{12-7}(y^5)^{7-1}$
   $tc = x^{12} . y^{25} \wedge t_c = x^{10} . y^{30}$

Atención

Para aplicar la fórmula del término general (t_k), la división debe tener la forma de cociente notable.



EFECTUAR



Grupo I:

Calcula el desarrollo de los siguientes cocientes notables:

1. $\dfrac{x^6 - y^6}{x - y}$
2. $\dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$
3. $\dfrac{(3x)^5 - 1}{3x - 1}$
4. $\dfrac{x^4 - 4^4}{x - 4}$
5. $\dfrac{16 - x^{16}}{2 - x^4}$
6. $\dfrac{x^{12}y^{20} - 81}{x^3y^5 - 3}$

Grupo II:

1. Indica el coeficiente del tercer término: $\dfrac{81x^{16} - 1}{3x^4 - 1}$
2. Del CN: $\dfrac{\frac{1}{81}a^{12} - 1}{\frac{1}{3}a^3 - 1}$

   indica el coeficiente del segundo término.

Grupo III:

1. Desarrolla el CN: $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y}$ e indica el producto de todos sus términos.
2. Indica el quinto término del cociente notable:

   $\dfrac{a^{26} - b^{39}}{a^2 - b^3}$

Problemas resueltos

1 Si la división:

$$\frac{x^{m^2+7}-y^{9m-13}}{x^2-y^2}$$

origina un cociente notable, indica los valores de m.

Resolución:

$$\frac{x^{m^2+7}-y^{9m-13}}{x^2-y^2}$$

Se cumple: $\frac{m^2+7}{2}=\frac{9m-13}{2} \Rightarrow m^2-9m+20=0$

Luego:

$m^2-9m+20=0$
m −4
m −5

$(m-4)(m-5)=0$

$\therefore\ m=4 \vee m=5$

2 Halla el lugar que ocupa el término de grado absoluto 34 en el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{60}-y^{30}}{x^4-y^2}$$

Resolución:

$$\frac{x^{60}-y^{30}}{x^4-y^2}=\frac{(x^4)^{15}-(y^2)^{15}}{(x^4)-(y^2)}$$

Sea k el lugar que ocupa el término de GA = 34:

$t_k=(x^4)^{15-k}\ .\ (y^2)^{k-1}=x^{60-4k}\ .\ y^{2k-2}$

$GA=58-2k=34$

$2k=24 \Rightarrow k=12$

3 Calcula **ab** si el siguiente CN tiene en su desarrollo como $t_{60}=x^{56}y^{708}$.

$$\frac{x^{148a}-y^{296b}}{x^{2a}-y^{4b}}$$

Resolución:

$$\frac{x^{148a}-y^{296b}}{x^{2a}-y^{4b}}=\frac{(x^{2a})^{74}-(y^{4b})^{74}}{(x^{2a})-(y^{4b})}$$

Luego: $t_{60}=(x^{2a})^{74-60}\ .\ (y^{4b})^{60-1}=x^{56}\,y^{708}$

$28a=56 \Rightarrow a=2$

$236b=708 \Rightarrow b=3$

Nos piden: $ab=6$

4 Simplifica:

$$M=\frac{x^{80}+x^{78}+...+x^4+x^2+1}{x^{40}-x^{39}+x^{38}-...+x^2-x+1}\ .\ (x-1)$$

Resolución:

$$M=\frac{\dfrac{x^{82}-1}{x^2-1}}{\dfrac{x^{41}+1}{x+1}}\ .\ (x-1) \Rightarrow M=\frac{(x^{82}-1)(x+1)(x-1)}{(x^2-1)(x^{41}+1)}$$

$$M=\frac{(x^{41}+1)(x^{41}-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^{41}+1)} \Rightarrow M=x^{41}-1$$

5 Simplifica:

$$M=\frac{4(5^{n-1}+5^{n-2}+5^{n-3}+...+5)+5}{5^{n-1}}$$

Resolución:

Ordenamos para formar el CN:

$$M=\frac{4(5)[5^{n-2}+5^{n-3}+5^{n-4}+...+1]+5}{5^{n-1}}$$

$$M=\frac{20\left[\dfrac{5^{n-1}-1}{5-1}\right]+5}{5^{n-1}}=\frac{5^n}{5^{n-1}}=5$$

6 Halla el término central del desarrollo del siguiente CN:

$$\frac{x^{6k-3}-y^{8k+3}}{x^{k-1}-y^{k+1}}$$

Resolución:

n.° términos $=\frac{6k-3}{k-1}=\frac{8k+3}{k+1} \Rightarrow k=4$

n.° términos $=\frac{6(4)-3}{4-1} \Rightarrow$ n.° de términos $=7$

Luego:

$$\left.\frac{x^{21}-y^{35}}{x^3-y^5}\right\} \Rightarrow tc=t_{\frac{7+1}{2}}=t_4$$

Hallamos t_4: $t_4=(x^3)^{7-4}\ .\ (y^5)^{4-1} \Rightarrow t_4=x^9y^{15}$

7 Calcula **m** para que la división:

$\frac{x^{4m+4}-y^{5m}}{x^{m+1}-y^{2m-3}}$; origine un cociente notable.

Resolución:

Si es un CN, entonces:

n.° términos $=\frac{4m+4}{m+1}=\frac{5m}{2m-3}$

$4=\frac{5m}{2m-3}$

$8m-12=5m \qquad \therefore\ m=4$

8 Encuentra el 5.° término del CN:

$$\frac{x^{26}+y^{39}}{x^2+y^3}$$

Resolución:

$n=\frac{26}{2}=\frac{39}{3} \Rightarrow n=13$

$t_5=[x^2]^{13-5}\ .\ [y^3]^{5-1}$; k = 5 (impar)

$\Rightarrow t_5=+[x^2]^8[y^3]^4 \qquad \therefore\ t_5=x^{16}y^{12}$



UNIDAD 2

FACTORIZACIÓN

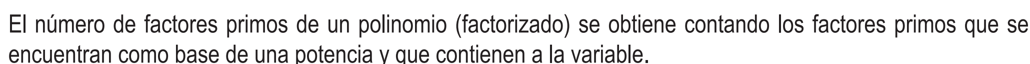
CONCEPTO

Es el procedimiento mediante el cual se transforma un polinomio en el producto indicado de factores primos.



CONTEO DE FACTORES PRIMOS

El número de factores primos de un polinomio (factorizado) se obtiene contando los factores primos que se encuentran como base de una potencia y que contienen a la variable.



Ejemplos:

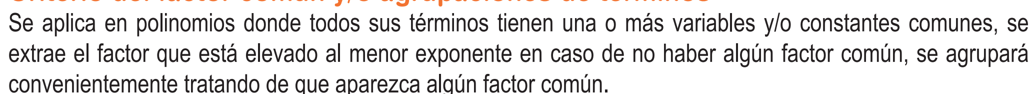
1. $P(x) = 9(x-9)^2(x^3+3)^9(7x-2)$
   Tiene 3 factores primos: 2 lineales
   1 cúbico

2. $H(x) = 9x(x^2+y^3)^2(x+1)^2(x+3)(x+5y)^7$
   Tiene 5 factores primos: 4 lineales
   1 cuadrático

CRITERIOS PARA FACTORIZAR

Criterio del factor común y/o agrupaciones de términos

Se aplica en polinomios donde todos sus términos tienen una o más variables y/o constantes comunes, se extrae el factor que está elevado al menor exponente en caso de no haber algún factor común, se agrupará convenientemente tratando de que aparezca algún factor común.



Ejemplos:

Factoriza

1) $A(x; y) = x^5y^3 - x^2y^5 + 7x^3y^4 - 10x^2y^{10}$
$= x^2y^3(x^3 - y^2 + 7xy - 10y^7)$

2) $B(a; b) = a^3 + a^2b - 2a^2b^2 - 2ab^3 + ab^3 + b^4$
$= (a^3 + a^2b) - (2a^2b^2 + 2ab^3) + (ab^3 + b^4)$
$= a^2(a+b) - 2ab^2(a+b) + b^3(a+b)$
$= (a+b)(a^2 - 2ab^2 + b^3)$

Criterio de las identidades

Consiste en aplicar los productos notables en forma inversa.



I. Trinomio cuadrado perfecto (tcp)

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

II. Diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

III. Suma de cubos

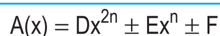
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

IV. Diferencia de cubos

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Criterio del aspa simple

Se aplica para factorizar polinomios de la forma:



$$A(x) = Dx^{2n} \pm Ex^n \pm F$$

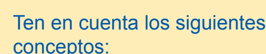
$$B(x; y) = Dx^{2m} \pm Ex^my^n \pm Fy^{2n}$$

Donde: D, E, F $\neq 0$ y $\{m; n\} \subset \mathbb{N}$

Ejemplos:

1. Factoriza:
   $H(x) = 18x^2 + 7x - 1$
   Descomponemos los extremos:
   $H(x) = 18x^2 + 7x - 1$
   $9x \quad -1 \quad -2x$
   $2x \quad +1 \quad 9x$ +
   $7x$
   $\therefore H(x) = (9x-1)(2x+1)$

2. Factoriza:
   $K(a; b) = 3a^4 + 2a^2b - 21b^2$
   Descomponemos los extremos:
   $K(a; b) = 3a^4 + 2a^2b - 21b^2$
   $a^2 \quad 3b \quad 9a^2b$
   $3a^2 \quad -7b \quad -7a^2b$ +
   $2a^2b$
   $\therefore K(a; b) = (a^2 + 3b)(3a^2 - 7b)$



Atención

Ten en cuenta los siguientes conceptos:

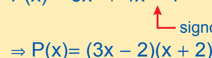
Factor primo
Es aquel polinomio que solo admite dos divisores (la unidad y la misma expresión).
Veamos:
- x : $1; x$
- $x+1$: $1; x+1$
- $x-3$: $1; x-3$
- $x+y$: $1; x+1$
- x^2+7 : $1; x^2+7$

Factor compuesto
Es aquel que resulta de la combinación de los factores primos.

$(2x+1)(3x+2)$: $2x+1$; $3x+2$; $(2x+1)(3x+2)$; 1
Admite más de 2 divisores.

Recuerda

Si el tercer término tiene signo (–), los signos son distintos para sus respectivos factores primos.
Ejemplo:
$P(x) = 3x^2 + 4x - 4$
signo negativo
$\Rightarrow P(x) = (3x-2)(x+2)$
signos distintos





Criterio del aspa doble

Se emplea para factorizar polinomios que tienen la siguiente forma general:

$$R(x; y) = Ax^{2m} + Bx^my^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F \qquad m; n \in \mathbb{Z}^+$$

Nota

Ax^{2m} ; Cy^{2n} y F
Son llamados también: términos fijos

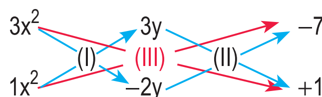
Procedimiento:

- Adecúa el polinomio a la forma general presentada.
- De faltar términos este se completará por ceros.
- 1.ª aspa simple entre: Ax^{2m} y Cy^{2n}; 2.ª aspa simple entre: Cy^{2n} y F
- Trazar un aspa grande considerando los términos: Ax^{2m} y F
- Comprobar con la 1.ª aspa simple el término: Bx^my^n
- Comprobar con la 2.ª aspa simple el término: Ey^n
- Comprobar con el aspa grande el término: Dx^m
- Los factores serán las sumas horizontales.

Ejemplo:
Factoriza: $Z(x; y) = 17y - 7 - 3x^2y + 3x^4 - 4x^2 - 6y^2$

Resolución:
Tomamos en cuenta el procedimiento

$Z(x; y) = 3x^4 - 3x^2y - 6y^2 - 4x^2 + 17y - 7$



Aspas:
(I): $(3x^2)(-2y) + (1x^2)(3y) = -3x^2y$
(II): $(3y)(+1) + (-2y)(-7) = 17y$
(III): $(3x^2)(+1) + (1x^2)(-7) = -4x^2$

Sumas horizontales: $Z(x; y) = (3x^2 + 3y - 7)(x^2 - 2y + 1)$

Recuerda

Coeficiente principal es el coeficiente de la variable con MAYOR EXPONENTE.

$Z(x) = 4x^7 + ③x^9 - 3x - 1$

coef. principal: ③ (su exponente variable es el mayor).



Criterio del aspa doble especial

Se utiliza para factorizar polinomios de 4.° grado de la forma general:

$$G(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E; \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

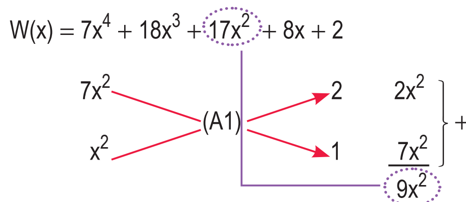
Procedimiento:

- Adecuamos el polinomio a la forma general, si faltase algún término, este se completará con ceros.
- Aplicamos un aspa simple con los términos extremos convenientemente descompuestos: Ax^{4n} y E
- El resultado se resta del término central: Cx^{2n}
- Expresar la diferencia en dos factores y colocarlos debajo del término central.
- Luego se aplican dos aspas simples y se toman los factores en forma horizontal.

Ejemplos:
Factoriza: $W(x) = 8x + 7x^4 + 17x^2 + 2 + 18x^3$

Resolución:
Veamos según el procedimiento:

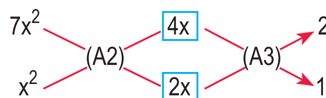
$W(x) = 7x^4 + 18x^3 + 17x^2 + 8x + 2$



Como el término: $Cx^{2n} = 17x^2$, el resultado de A1 nos da $9x^2$.
Entonces: $17x^2 - 9x^2 = 8x^2$
Faltará entonces: $8x^2$ (cantidad a agregar).
Descomponemos $8x^2$ en dos factores en forma conveniente de manera que coincidan con los términos: $Bx^{3n} = 18x^3$ y $Dx^n = 8x$

Así: $8x^2 = (8x)(x) \quad (x)(8x)$
$(4x)(2x) \quad (2x)(4x)$ } Factores posibles

$W(x) = 7x^4 + 18x^3 + 17x^2 + 8x + 2$



Verificamos:

(A2): $(7x^2)(2x) + (x^2)(4x) = 18x^3$
(A3): $(4x)(1) + (2x)(2) = 8x$
} Verifican las condiciones del aspa A2 y A3 ⇒ los términos están bien descompuestos.

Factores en forma horizontal:
$\therefore \; W(x) = (7x^2 + 4x + 2)(x^2 + 2x + 1)$

Problemas resueltos

X

1 Factoriza:
$P(x; y) = 6x^2 - 7xy + 2y^2 - 13x + 7y + 5$
¿cuántos factores primos lineales se obtienen?

Resolución:

$P(x; y) = 6x^2 - 7xy + 2y^2 - 13x + 7y + 5$

$3x \quad -2y \quad -5 \quad -10x$
$2x \quad -y \quad -1 \quad -3x$
$-13x$

$\Rightarrow P(x; y) = (3x - 2y - 5)(2x - y - 1)$
Se obtienen 2 factores lineales.

2 Factoriza:
$P(x) = 5x^4 + 8x^3 - x - 2$
Halla el producto de los términos cuadráticos de los factores primos.

Resolución:

Por aspa doble especial:

$P(x) = 5x^4 + 8x^3 + 0x^2 - x - 2$

$5x^2 \quad 3x \quad +2 = 2x^2$
$x^2 \quad x \quad -1 = -5x^2$
$-3x^2 + 3x^2 = 0x^2$

Falta: $3x^2 = 3x(x)$
$\Rightarrow P(x) = (5x^2 + 3x + 2)(x^2 + x - 1)$
Nos piden el producto de los términos cuadráticos:
$5x^2 . x^2 = 5x^4$

3 Factoriza:
$M = x^{10} + x^9 + x^8 + x^3 - 1$
Halla el número de factores primos.

Resolución:

Agrupamos convenientemente:
$M = (x^{10} + x^9 + x^8) + x^3 - 1$
$M = x^8 (x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)$
$M = (x^2 + x + 1)(x^8 + x - 1)$
$\therefore$ M tiene 2 factores primos.

4 ¿Cuántos factores primos lineales presenta el polinomio:
$P(a; b; c) = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4c^2b^2$?

Resolución:

$P(a; b; c) = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4c^2b^2$
$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - (2bc)^2$
$= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)$
$= \{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)\}\{a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc)\}$
$= \{a^2 - (b - c)^2\}\{a^2 - (b + c)^2\}$
$= (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(a - b - c)$

El polinomio presenta 4 factores primos lineales.

5 Factoriza:
$B = (x - 5y)^2 - 3(x- 5y) - 18$

Resolución:

Aplicamos el método del aspa simple:

$(x - 5y)^2 - 3(x - 5y) - 18$
$(x - 5y) \quad -6 \qquad -6(x - 5y)$
$(x - 5y) \quad +3 \qquad 3(x - 5y)$
$-3(x - 5y)$

$\therefore B = (x - 5y - 6)(x - 5y + 3)$

6 Halla la suma de los términos de los factores primos lineales de:
$P(x) = x(2x + a + b) + a(b - a)$

Resolución:

$P(x) = x(2x + a + b) + a(b - a)$
$2x^2 + (a + b)x + a(b - a)$
$2x \quad (b - a)$
$x \quad a$

$P(x) = (2x + b - a)(x + a)$

Nos piden la suma de los términos:
$2x + b - a + x + a = 3x + b$

7 Factoriza:
$F(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 1) - (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$

Resolución:

$F(x) = x^6 - 1 - [(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12)]$
$F(x) = x^6 - 1 - [(x^2 + 7x + 10)^2 + 2(x^2 + 7x + 10)]$
$F(x) = x^6 - [(x^2 + 7x + 10)^2 + 2(x^2 + 7x + 10) + 1]$
$F(x) = (x^3)^2 - (x^2 + 7x + 11)^2$
$F(x) = (x^3 + x^2 + 7x + 11)(x^3 - x^2 - 7x - 11)$

8 Factoriza el polinomio:
$M(x) = x^7 + 7x^4 - 8x$
E indica la suma de sus factores primos lineales.

Resolución:

$M(x) = x(x^6 + 7x^3 - 8)$
$x^3 \quad +8$
$x^3 \quad -1$

$M(x) = x(x^3 + 8)(x^3 - 1)$
$M(x) = \underline{x}(\underline{x + 2})(x^2 - 2x + 4)(\underline{x - 1})(x^2 + x + 1)$

factores lineales primos

$\therefore \Sigma$ factores primos lineales: $3x + 1$

MCD – MCM Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente numérico (prescindiendo de los signos) que es factor (o divisor) de los polinomios dados.

Procedimientos para calcular el MCD de varios polinomios

a) Descomponer los polinomios en el producto de sus factores primos.
b) El MCD es el producto obtenido al tomar todos los factores comunes elevados a la menor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A(x; y) = 2^3 3^2 (x-y)^3 (x+2y)^2 \\ B(x; y) = 2^2 3^3 (x-y)^2 (x+2y)^3 \\ C(x; y) = 3^2 (x-y)^2 (x+2y) \end{array}\right\} \text{MCD}(A(x; y); B(x; y); C(x; y)) = 3^2 (x-y)^2 (x+2y)$$



Recuerda

1. Sean: $A(x; y) \wedge B(x; y)$ expresiones primas entre sí (PESÍ).

$\text{MCD}(A(x; y); B(x; y)) = 1$
y
$\text{MCM}(A(x; y); B(x; y)) = A(x; y) \,.\, B(x; y)$

2. Dadas las expresiones: A y B dependientes de x e y.

$\text{MCD}(A; B) \,.\, \text{MCM}(A; B) = A \,.\, B$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y menor coeficiente (prescindiendo de los signos) del cuál es factor (o divisor) cada uno de los polinomios dados.

Procedimiento para calcular el MCM de varios polinomios

a) Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos.
b) El MCM es el producto obtenido al tomar todos los factores comunes y no comunes, elevados a la mayor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} M(x; y) = 2^3 3^2 (x-y)^3 (x+2y)^2 \\ N(x; y) = 2^3 3^3 (x-y)^2 (x+2y)^3 \\ P(x; y) = 3^2 (x-y)^2 (x+2y) \end{array}\right\} \text{MCM}(M(x; y); N(x; y); P(x; y) = 2^3 \,.\, 3^3 (x-y)^3 (x+2y)^3$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Fracción algebraica racional

Es una expresión que se puede escribir como el cociente de dos polinomios.

Ejemplo:

$\dfrac{3x-5}{x^3-6x+1}$ y $\dfrac{x^4+3}{x^2-2x-1}$ son fracciones algebraicas racionales.



Observación

1. Las partes de una fracción algebraica son:
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ $\longrightarrow$ Numerador / $\longrightarrow$ Denominador

2. $\dfrac{x^2+7x-2}{100}$: NO es una fracción algebraica

Clases de fracciones algebraicas

A) Fracciones equivalentes

Propiedad fundamental: el valor de una fracción no se altera si se multiplica o divide el numerador y el denominador por una misma cantidad, siempre que esta sea distinta de cero, en estas condiciones las fracciones se llaman equivalentes.

Ejemplos:

1. Si se multiplica el numerador y denominador de $\dfrac{x+2}{x-3}$ por $(x+7)$, se obtiene la fracción equivalente:

$\dfrac{(x+2)(x+7)}{(x-3)(x+7)} = \dfrac{x^2+9x+14}{x^2+4x-21}$, siempre que $(x+7)$ sea distinto de cero; es decir $x \neq -7$

2. Análogamente, de la fracción: $\dfrac{x^2+12x+35}{x^2+14x+45}$ se puede expresar como: $\dfrac{(x+7)(x+5)}{(x+9)(x+5)}$

Si dividimos su numerador y denominador por $(x+5)$, siempre que $(x+5)$ sea distinto de cero, o bien, $x \neq -5$, se obtiene: $\dfrac{x+7}{x+9}$

La operación de dividir por un factor común al numerador y denominador recibe el nombre de simplificación, y se indica tachando el término común; así:

$$\frac{(x+7)\cancel{(x+5)}}{(x+9)\cancel{(x+5)}} = \frac{x+7}{x+9}$$



B) Fracción impropia

Es cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{1+x^2}{2x-1};\ \frac{2x+3}{2x-7};\ \frac{x^2y^2+3xy-2x}{xy-5y+2x^2}$$

C) Fracción compleja

Cuando al menos uno de sus términos es una expresión fraccionaria.

Ejemplos:

$$\frac{x^2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}{3x^2+1};\ \frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{2}{3x^2-\dfrac{1}{x}}}{3x^2-2x+\dfrac{x^2}{x-1}}$$

D) Fracción de valor constante

Cuando asume el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores asignados a sus variables.

Si: $A(x;\ y)=\dfrac{Mx^2+Nxy^2+Py}{M_1x^2+N_1xy^2+P_1y}$, es una fracción de valor constante.

Se cumple:

$$\frac{M}{M_1}=\frac{N}{N_1}=\frac{P}{P_1}=\text{ Valor constante de A.}$$

Operaciones en fracciones algebraicas

A) Suma y resta de fracciones algebraicas

1. Igual denominador

   En este caso se realiza la suma algebraica de los numeradores y el denominador es el denominador común.

   Ejemplos:

   - $\dfrac{3x}{x-y}-\dfrac{7x}{x-y}+\dfrac{2x}{x-y}-\dfrac{x}{x-y}=\dfrac{3x-7x+2x-x}{x-y}=\dfrac{(3-7+2-1)x}{x-y}=\dfrac{-3x}{x-y}=\dfrac{3x}{y-x}$
   - $\dfrac{10}{x-10}-\dfrac{2x+1}{x-10}+\dfrac{x^3+2x+1}{x-10}=\dfrac{10-(2x+1)+(x^3+2x+1)}{x-10}=\dfrac{x^3+10}{x-10}$

2. Distinto denominador

   Se transforman las fracciones en otras equivalentes que tengan un denominador común.
   El denominador común de varias fracciones es el mínimo común múltiplo (MCM) de sus denominadores.

   Ejemplos:

   - $\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{5x}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{5(10)-2x^2(1)+5x^3(x)}{10x^3}=\dfrac{5x^4-2x^2+50}{10x^3}$
   - $\dfrac{3x-1}{x(x-7)}+\dfrac{10}{(x-7)(x+1)}=\dfrac{(3x-1)(x+1)+10x}{x(x-7)(x+1)}=\dfrac{3x^2+3x-x-1+10x}{x(x-7)(x+1)}=\dfrac{3x^2+12x-1}{x(x-7)(x+1)}$

B) Producto de fracciones algebraicas

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)\cancel{(x+3)}}=\frac{(x-3)}{x-1}$$

C) Cociente de fracciones algebraicas

El cociente de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando la fracción dividendo (o fracción numerador) por el recíproco de la fracción divisor (o fracción denominador).

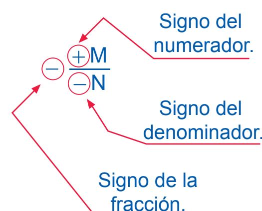
Ejemplos:

- $\dfrac{100}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+1}{x+3}=\left(\dfrac{100}{\cancel{(x+3)}(x-3)}\right)\left(\dfrac{\cancel{(x+3)}}{x^2+1}\right)=\dfrac{100}{(x-3)(x^2+1)}$
- $\dfrac{a^3+a}{a^2-a}\div\dfrac{a^3-a^2}{a^2-2a+1}=\dfrac{a^3+a}{a^2-a}\cdot\dfrac{a^2-2a+1}{a^3-a^2}=\dfrac{a(a^2+1)}{a(a-1)}\cdot\dfrac{(a-1)^2}{a^2(a-1)}=\dfrac{a^2+1}{a^2}=1+\dfrac{1}{a^2}$

Nota

Ten en cuenta

- Los tres signos de una fracción:



Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos simultáneamente sin que varíe el valor de la fracción.

$$\frac{x-y}{2x-1}=\frac{-(y-x)}{-(1-2x)}=\frac{y-x}{1-2x}$$

Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobreentiende que esta es positiva (+).

$$\frac{4x-y}{x+y}=+\frac{4x-y}{x+y}$$

- Considera también:

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$$

$$\frac{-A}{-B}=\frac{A}{B}$$

$$-\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{B}$$

Observación

Pasos para reducir una fracción compuesta o compleja:

1. Reduce el numerador y denominador a fracciones simples.
2. Se dividen las dos fracciones que resultan.

Ejemplo:

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

$$=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}=x-1$$



Problemas resueltos

1 Halla el MCM de:

$P(x) = (x + 1)^{1000}(x - 2)^{100}(x + 3)^{n}$

$Q(x) = (x + 1)^{500}(x - 2)(x + 3)^{n+1}$

Resolución:

Factores:
$(x + 1); (x - 2); (x + 3)$

Para hallar el MCM escogemos los factores con su mayor exponente; veamos:

$MCM(P(x); Q(x)) = (x + 1)^{1000}(x - 2)^{100}(x + 3)^{n+1}$

2 Calcula el MCM de:

$A = 2x^2y^4z^8$

$B = 3x^4y^3$

$C = 4x^5y^2z^6$

Resolución:

Primero calculamos el MCM de 2; 3 y 4:

2	3	4	2
1	3	2	2
1	3	1	3
1	1	1	

$\Rightarrow$ MCM(2; 3; 4) = 2 . 2 . 3 = 12

Luego, escogemos cada una de las variables con el mayor valor de los exponentes:

$MCM(A; B; C) = 12x^5y^4z^8$

3 Halla el MCM de:

$A(x) = (x + 1)^{100}(x - 1)(x + 2)^3$

$B(x) = (x - 1)^{10}(x + 2)$

Da como respuesta la suma de exponentes de sus factores.

Resolución:

Aplicamos la definición del MCM y escogemos cada factor con su exponente de mayor valor:

$MCM(A(x); B(x)) = (x + 1)^{100}(x - 1)^{10}(x + 2)^3$

$\therefore 100 + 10 + 3 = 113$

4 El MCD y el MCM de dos polinomios son respectivamente:

$MCD(A; B) = (2x + 1)(x + 4)$

$MCM(A; B) = (2x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3)$

Si uno de los polinomios es: $(2x + 1)(x + 4)(x + 2)$

Halla el otro polinomio.

Resolución:

Sean los polinomios A(x) y B(x), por propiedad:

$MCM(A; B) . MCD(A; B) = A(x) . B(x)$

Reemplazamos:

$$\underbrace{(2x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3)}_{MCM(A;\,B)}\underbrace{(2x + 1)(x + 4)}_{MCD(A;\,B)} = (2x + 1)(x + 4)(x + 2) . B(x)$$

$\therefore B(x) = (x + 3)(2x + 1)(x + 4)$

5 Simplifica la expresión:

$$R = \frac{(x + a + b + c)(x + a + b + d) - cd}{(x + a + b + c + d)}$$

Resolución:

Hacemos que: $x + a + b = n$

Luego: $R = \dfrac{(n + c)(n + d) - cd}{(n + c + d)}$

Efectuando: $R = \dfrac{n^2 + (c + d)n + cd - cd}{(n + c + d)}$

$$R = \frac{n^2 + (c + d)n}{(n + c + d)} = \frac{n(n + c + d)}{(n + c + d)} = n$$

Como: $n = x + a + b$

$\therefore R = x + a + b$

6 Simplifica:

$$T = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 4} + \frac{x - 1}{x + 1}$$

Resolución:

$$T = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 4} + \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$T = \frac{(x + 4)(x + 3)}{(x + 4)(x + 1)} + \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$T = \frac{x + 3}{x + 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x + 3 + x - 1}{x + 1}$$

$$T = \frac{2x + 2}{x + 1} = \frac{2(x + 1)}{x + 1} = 2$$

$\therefore T = 2$

7 Simplifica:

$$E = \frac{(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 2x - 3)}$$

Resolución:

$$E = \frac{(x - 4)(x + 1)(x - 3)(x - 2)}{(x - 4)(x - 2)(x - 3)(x + 1)}$$

$\therefore E = 1$

POTENCIACIÓN

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Es el resultado que se obtiene de multiplicar todos los números naturales en forma consecutiva desde la unidad hasta el número dado.

Notación:

$n!$, $\lfloor n$ ó $n\rfloor$

Se lee: "factorial de n" o "n factorial"

Ejemplos:

$\lfloor 3 = 3! = 1\,.\,2\,.\,3$

$\lfloor 5 = 5! = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5$

$\lfloor 90 = 90! = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,89\,.\,90$

En general:

$\lfloor n = n! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)\,.\,n;\ n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$

NÚMERO COMBINATORIO

Se define como el número total de grupos que se puede formar con "n" elementos tomados de "k" en "k", de modo que los grupos se diferencien por lo menos en un elemento.

Definición matemática: si $n \geq k$, entonces: $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Ejemplos:

1. $C_2^3 = \dfrac{3!}{1!2!} = \dfrac{3\,.\,\cancel{2\,.\,1}}{\cancel{2\,.\,1}} = 3$

2. $C_{68}^{70} = \dfrac{70!}{2!\,.\,68!} = \dfrac{\cancel{70}.69.\cancel{68!}}{\cancel{2}.1.\cancel{68!}} = 2415$

Regla práctica:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}^{\text{"k" factores}}}{\underbrace{1.2.3\ldots k}_{\text{"k" factores}}}$$

Ejemplos:

1. $C_4^8 = \dfrac{\overbrace{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}^{4 \text{ factores}}}{\underbrace{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}_{4 \text{ factores}}} = 70$

2. $C_{97}^{100} = \dfrac{100.99.98\ldots\ .4}{1.2.3\ldots97} = 161\,700$



Observaciones

1. Se define los factoriales solo para los números naturales ($\mathbb{N}$).
   Donde:
   $\lfloor -7$: no existe
   $\lfloor \frac{7}{9}$: no existe
   $\lfloor \sqrt{11}$: no existe
2. El factorial de un número se puede expresar en función del factorial de otro número menor.
   Veamos:
   $\lfloor 7 = 1.2.3.4.5.6.7 = 210\lfloor 4$
   $\lfloor 7 = 1.2.3.4.5.6.7 = 42\lfloor 5$
   $\lfloor 7 = 1.2.3.4.5.6.7 = 7\lfloor 6$
3. Por convención: $\lfloor 0 = 1$ y
   Por definición: $\lfloor 1 = 1$
   Esto NO implica que:
   $\lfloor 0 = \lfloor 1 \Rightarrow 0 = 1$ absurdo
4. Si: $\lfloor m = 1$
   $\Rightarrow m = 0 \vee m = 1$
5. Si: $\lfloor m = \lfloor n$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow m = n$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

I. Suma de combinatorios

$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

Ejemplo:

- $C_7^{13} + C_8^{13} = C_8^{14}$

III. Degradación de índices

Ambos índices: $C_k^n = \dfrac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}$

Índice superior: $C_k^n = \dfrac{n}{n-k}C_k^{n-1}$

Índice inferior: $C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k}C_{k-1}^n$

Ejemplos:

1. $C_3^7 = \frac{7}{3}C_2^6$ 2. $C_5^9 = \frac{9}{4}C_5^8$ 3. $C_3^9 = \frac{7}{3}C_2^9$

II. Propiedad complementaria

$C_k^n = C_{n-k}^n$

Ejemplo:

- $C_{35}^{37} = C_2^{37} = \dfrac{37.36}{1.2} = 666$

IV. Igualdad de números combinatorios

$C_p^n = C_q^n$

Donde:

$p = q \quad \vee \quad p + q = n$

Ejemplo:

$C_{2x-1}^7 = C_{x+2}^7$

$2x - 1 = x + 2 \quad \vee \quad (2x-1) + (x+2) = 7$

$x = 3 \qquad\qquad x = 2$

$\therefore\ CS = \{2; 3\}$

Nota

- Número de combinaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k": C_k^n; ${}^nC_k$; ${}_nC_k$
- Resultados importantes:
  1. $C_0^n = C_n^n = 1;\ n \in \mathbb{Z}^+$
  2. $C_1^n = C_{n-1}^n = n;\ n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$

BINOMIO DE NEWTON

Desarrollo del binomio con exponente natural, $n \in \mathbb{N}$

Analicemos el desarrollo del binomio $(x + a)^n$; $n \in \mathbb{N}$

$$(x + a)^1 = x + a = C_0^1 x + C_1^1 a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = C_0^2 x^2 + C_1^2 xa + C_2^2 a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = C_0^3 x^3 + C_1^3 x^2 a + C_2^3 xa^2 + C_3^3 a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3 a + C_2^4 x^2 a^2 + C_3^4 xa^3 + C_4^4 a^4$$

$$\vdots$$

$$(x + a)^n = \underbrace{C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} a^2 + C_3^n x^{n-3} a^3 + \dots + C_n^n a^n}$$

Desarrollo o expansión del binomio.

En general:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} a^k$$

Triángulo de Pascal

Es la forma práctica de deducir directamente el desarrollo del binomio.

$(x + a)^0$	=	1
$(x + a)^1$	=	1 1
$(x + a)^2$	=	1 2 1
$(x + a)^3$	=	1 3 3 1
$(x + a)^4$	=	1 4 6 4 1
$(x + a)^5$	=	1 5 10 10 5 1
$(x + a)^6$	=	1 6 15 20 15 6 1

Cálculo del término general

t_{k+1} de $(x + a)^n$

Fórmula del término general:

$$t_{k+1} = C_k^n \, x^{n-k} \, a^k$$

Donde:
$k + 1$: lugar del término pedido
n: exponente del binomio

Posición del término central

Dado: $(x + a)^n$

1. Cuando **n** es par existe un término central.

$$t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

2. Cuando **n** es impar existen dos términos centrales.

$$t_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \wedge t_{\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}$$

No olvidar que "n" es el exponente del binomio: $(x + a)$

Ejemplos:

1. Halla el término central de: $(x + 2)^6$

Resolución:
$(x + 2)^6$ ← par

$\Rightarrow t_{\left(\frac{6}{2}+1\right)}$: término central

$$t_4 = t_{3+1} = C_3^6 x^{6-3} . 2^3$$

$$t_4 = \frac{6.5.4}{1.2.3} . x^3 . 8$$

$$\therefore t_4 = 160x^3$$

2. Halla en término central de: $(x - 3)^7$

Resolución:
$(x - 3)^7$ → impar → 2 términos centrales

$\Rightarrow t_{\left(\frac{7+1}{2}\right)} \wedge t_{\left(\frac{7+1}{2}+1\right)}$: términos centrales

Hallaremos el t_5:

$$t_5 = t_{4+1} = + C_4^7 \, x^{7-4} . 3^4$$

$$t_5 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} . x^3 . 3^4$$

$$\therefore t_5 = tc = 2835x^3$$

Atención

1. El número de términos del desarrollo del binomio $(x + a)^n$ es:

n.° términos = n + 1

2. La sumatoria de coeficientes de $(x + a)^n$ se obtiene cuando: $x = a = 1$

$\Rightarrow$ Σcoef. $= 2^n$

y Σcoef. $(x - a)^n = 0$



Recuerda

Al triángulo de Pascal también se le conoce como triángulo de Tartaglia.

Observación

En forma práctica, la utilización del triángulo de Tartaglia solo es posible para potencias pequeñas.
En lo sucesivo es mejor emplear el desarrollo o expansión del binomio en forma general.

Observación

1. El desarrollo del binomio: $(x + a)^n$ se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases, también es un polinomio homogéneo.
2. $(x + a)^n = +, +, +, +, \dots +$
   $(x - a)^n = +, -, +, -, \dots$
3. Sea: $(x + a)^n$
   n: par $\Rightarrow$ Hay un solo término central, en este caso los exponentes de sus bases son iguales.
   Ejemplo:
   $(x + a)^2 = C_0^2 x^2 + C_1^2 \underbrace{xa}_{tc} + C_2^2 a^2$

Problemas resueltos

1 Del siguiente binomio:

$(x^3y + x^2y^3)^{23}$

Halla: $\dfrac{t_{10}}{t_{15}}$

Resolución:

Dado el binomio: $(x^3y + x^2y^3)^{23}$

$t_{10} = C_9^{23}(x^3y)^{23-9}(x^2y^3)^9$ $\qquad$ $t_{15} = C_{14}^{23}(x^3y)^{23-14}(x^2y^3)^{14}$

$t_{10} = C_9^{23}(x^3y)^{14}(x^{18}y^{27})$ $\qquad$ $t_{15} = C_{14}^{23}(x^3y)^{9}(x^2y^3)^{14}$

$t_{10} = C_9^{23}x^{42}y^{14}x^{18}y^{27}$ $\qquad$ $t_{15} = C_{14}^{23}x^{27}y^{9}x^{28}y^{42}$

$t_{10} = C_9^{23}x^{60}y^{41}$ $\qquad$ $t_{15} = C_{14}^{23}x^{55}y^{51}$

Piden:

$$\frac{t_{10}}{t_{15}} = \frac{C_9^{23}x^{60}y^{41}}{C_{14}^{23}x^{55}y^{51}} \Rightarrow \frac{t_{10}}{t_{15}} = \frac{C_9^{23}x^{5}}{C_9^{23}y^{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_{10}}{t_{15}} = \frac{x^5}{y^{10}}$$

2 Halla el valor de $(m + n)$, si:

$C_8^m + 4C_9^m + 6C_{10}^m + 4C_{11}^m + C_{12}^m = C_{27}^n$

Resolución:

Dada la igualdad:

$C_8^m + 4C_9^m + 6C_{10}^m + 4C_{11}^m + C_{12}^m = C_{27}^n$

$C_8^m + C_9^m + 3C_9^m + 6C_{10}^m + 4C_{11}^m + C_{12}^m = C_{27}^n$

Desarrollamos el primer miembro; aplicamos la siguiente propiedad:

$\mathbf{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$

$C_9^{m+1} + 3(C_9^m + C_{10}^m) + 3(C_{10}^m + C_{11}^m) + C_{11}^m + C_{12}^m$

$= C_9^{m+1} + 3C_{10}^{m+1} + 3C_{11}^{m+1} + C_{12}^{m+1}$

$= C_9^{m+1} + C_{10}^{m+1} + 2(C_{10}^{m+1} + C_{11}^{m+1}) + C_{11}^{m+1} + C_{12}^{m+1}$

$= C_{10}^{m+2} + 2C_{11}^{m+2} + C_{12}^{m+2}$

$= C_{10}^{m+2} + C_{11}^{m+2} + C_{11}^{m+2} + C_{12}^{m+2}$

$= C_{11}^{m+3} + C_{12}^{m+3} = C_{12}^{m+4}$

Luego: $C_{12}^{m+4} = C_{27}^n$

$m + 4 = n = 12 + 27$

$\Rightarrow n = 39$

$m + 4 = 39$

$m = 35$

Nos piden: $n + m = 35 + 39 = 74$

3 Calcula el mayor de los coeficientes en el desarrollo de $P(x; y) = (x + y)^n$; sabiendo que la sumatoria de sus coeficientes es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Resolución:

$P(x; y) = (x + y)^n$

Dato: $\Sigma\text{coef. } P(x; y) = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$

Sabemos que:

$\Sigma\text{coef. } P(x; y) = P(1; 1) = 2^n$

Luego: $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = 2^n \Rightarrow 2\sum\limits_{k=1}^{n}k - \sum\limits_{k=1}^{n}(1) = 2^n$

$$2(1 + 2 + 3 + ... + n) - (\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ términos}}) = 2^n$$

$$n(n+1) - n = 2^n \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2^n \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \vee \\ n = 4 \end{cases}$$

Nos piden el mayor coeficiente:

$\Rightarrow n = 4$

Luego:

$(x + y)^4 = C_0^4x^4 + C_1^4x^3y + C_2^4x^2y^2 + C_3^4xy^3 + C_4^4y^4$

El mayor coeficiente es:

$$C_2^4 = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\,\lfloor 2} = \frac{4.3\lfloor 2}{\lfloor 2\,\lfloor 2} = 6$$

4 Halla el valor de:

$M = \dfrac{9! - 8!}{7!} + \dfrac{8! - 7!}{6!} + ... + \dfrac{2! - 1!}{0!}$

Resolución:

Encontramos el patrón de cada término para reducir la expresión M.

Veamos:

$M = \dfrac{9! - 8!}{7!} + \dfrac{8! - 7!}{6!} + ... + \dfrac{2! - 1!}{0!}$

$$\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n! - (n+1)n!}{n!}$$

$$= (n + 2 - 1)(n + 1) = (n + 1)^2$$

Reemplazamos en M:

$$M = \underbrace{8^2 + 7^2 + ... + 1^2}_{\text{Suma de los cuadrados de los "k" números.}}$$

$M = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$; con $k = 8$

$M = \dfrac{8.9.17}{6} = 204$

$\therefore M = 204$

RADICACIÓN – RACIONALIZACIÓN

Nota

- $\sqrt[2n+1]{+} = +$
- $\sqrt[2n+1]{-} = -$
- $\sqrt[2n]{+} = +$
- $\sqrt[2n]{-} =$ Cantidad imaginaria

Recuerda

- Los siguientes teoremas:

1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
2. $\sqrt[n]{pq} = \sqrt[n]{p}\,.\sqrt[n]{q}$
3. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{r}}} = \sqrt[abc]{r}$
4. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}; y \neq 0$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.t]{a^t}$
6. $\sqrt[a]{R^a} = R = \sqrt[a]{R}^a$

- En las operaciones con radicales se procede así:

Introducir factores en una raíz:
Se realiza potenciando el factor a un exponente igual al índice que tiene la raíz.
Veamos:

$3a^3b^2\sqrt[11]{ab^3c} = \sqrt[11]{3^{11}(a^3)^{11}(b^2)^{11}ab^3c}$
$= \sqrt[11]{3^{11}a^{34}b^{25}c}$

Extraer factores de una raíz:
Se realiza solo cuando el exponente del factor es mayor o igual que el índice.
Veamos:

$\sqrt[3]{a^{10}b^7c^3d} = \sqrt[3]{(a^3)^3a(b^2)^3bc^3d}$
$= a^3b^2c\sqrt[3]{abd}$



RADICACIÓN

Es aquella operación matemática que consiste en obtener una expresión llamada raíz conociendo otras dos denominadas índice y radicando.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

Donde:
n: índice: $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$
a: radicando o cantidad subradical.
b: raíz.

Tipos de radicales

Radicales homogéneos
Estos se caracterizan por tener el mismo índice.

Ejemplos:

- $\sqrt[7]{3}$; $\frac{1}{2}\sqrt[7]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[7]{2}}$ son homogéneos de índice 7.
- $\sqrt[3]{2}$; $4\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[3]{x}$ son homogéneos de índice 3.

Radicales semejantes
Estos tienen la misma expresión subradical y el mismo índice.

Ejemplos:

- $\frac{1}{10}\sqrt[9]{3x^2}$; $-2\sqrt[9]{3x^2}$; $7\sqrt[9]{3x^2}$

Expresión subradical igual a $3x^2$ e índice 9.

Radicales dobles

Son aquellos que se caracterizan porque dentro de un radical, se encuentran otros radicales relacionados con las operaciones de adición o sustracción.

Transformación de radicales dobles a simples.
No siempre se podrá transformar los radicales dobles a simples. Estudiaremos el caso más usado con los correspondientes requisitos para dicha transformación.

Radicales de la forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Ejemplos:

1. $\sqrt{7-\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-45}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-45}}{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-45}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-45}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{7+2}{2}} - \sqrt{\frac{7-2}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\therefore \sqrt{7-\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$

2. $\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{9^2-17}}{2}} + \sqrt{\frac{9-\sqrt{9^2-17}}{2}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-17}}{2}} + \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-17}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{9+\sqrt{64}}{2}} + \sqrt{\frac{9-\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{\frac{9+8}{2}} + \sqrt{\frac{9-8}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{17}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

Caso práctico:

$$\sqrt{(A+B) \pm 2\sqrt{AB}} = \sqrt{A} \pm \sqrt{B}\ ; A > B$$

Ejemplos:

1. $\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5.2}}$

$\therefore \sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

2. $\sqrt{10-\sqrt{84}} = \sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{(7+3)-2\sqrt{7.3}}$

$\therefore \sqrt{10-\sqrt{84}} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$



RACIONALIZACIÓN

Es la operación mediante la cual se transforma una expresión cuyo denominador es irracional en otra equivalente, pero con denominador racional. Para esto se multiplica ambos términos de la fracción por una expresión llamada factor racionalizante (FR).

Factor racionalizante (FR)

Es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

Racionalización de denominadores monomios: $\sqrt[A]{B^C}\ ; A > C$

Multiplicar el numerador y denominador de la fracción por el FR:

$\sqrt[A]{B^{A-C}}$

Ejemplos:

1. $\dfrac{111}{\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{111}{\sqrt[3]{6^2}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{6^{3-2}}}{\sqrt[3]{6^{3-2}}}\right) = \dfrac{111\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{37\sqrt[3]{6}}{2}$

2. $\dfrac{a^2b^2c^2}{\sqrt[7]{a^5b^2e}} = \dfrac{a^2b^2c^2}{\sqrt[7]{a^5b^2e}}\left(\dfrac{\sqrt[7]{a^{7-5}b^{7-2}e^{7-1}}}{\sqrt[7]{a^{7-5}b^{7-2}e^{7-1}}}\right) = \dfrac{a^2b^2c^2\sqrt[7]{a^2b^5e^6}}{abe} = \dfrac{abc^2}{e}\sqrt[7]{a^2b^5e^6}$

3. $\dfrac{a^5b^8}{\sqrt[4]{a^{13}b^{23}}} = \dfrac{a^5b^8}{\sqrt[4]{a^{13}\,.\,b^{23}}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a^{16-13}\,.\,b^{24-23}}}{\sqrt[4]{a^{16-13}\,.\,b^{24-23}}} = \dfrac{a^5b^8}{\sqrt[4]{a^{13}\,.\,b^{23}}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a^3\,.\,b}}{\sqrt[4]{a^3\,.\,b}} = \dfrac{a^5b^8\,.\,\sqrt[4]{a^3\,.\,b}}{\sqrt[4]{a^{16}\,.\,b^{24}}}$

$= \dfrac{a^5b^8\,.\,\sqrt[4]{a^3b}}{a^4\,.\,b^6} = ab^2\sqrt[4]{a^3b}$

Racionalización de denominadores binomios

1.ª forma:

$\sqrt[2A]{B} \pm \sqrt[2A]{C};\ A \in \mathbb{N}$

Multiplicar el numerador y denominador por el FR: $\sqrt[2A]{B} \mp \sqrt[2A]{C}$

Ejemplos:

1. $\dfrac{16}{\sqrt[4]{3}+1} = \dfrac{16}{\sqrt[4]{3}+1}\left(\dfrac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}-1}\right) = \dfrac{16(\sqrt[4]{3}-1)}{\sqrt{3}-1}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = 8(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

2. $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right) = 2(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

3. $\dfrac{2(x^6-y^5)}{\sqrt{x^6}+\sqrt{y^5}} = \dfrac{2(x^6-y^5)}{\sqrt{x^6}+\sqrt{y^5}}\left(\dfrac{\sqrt{x^6}-\sqrt{y^5}}{\sqrt{x^6}-\sqrt{y^5}}\right) = \dfrac{2(x^6-y^5)(\sqrt{x^6}-\sqrt{y^5})}{x^6-y^5} = 2(x^3-y^2\sqrt{y})$

2.ª forma:

$\sqrt[3A]{B} \pm \sqrt[3A]{C};\ A \in \mathbb{N}$

Multiplicar el numerador y denominador por el FR: $\sqrt[3A]{B^2} \pm \sqrt[3A]{BC} + \sqrt[3A]{C^2}$

Ejemplos:

1. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}\right) = \dfrac{5(2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{2^3})}$

$= \dfrac{5}{2}(2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

2. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}\right) = \dfrac{8(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{8}{8}(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$

$= \sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$

Importante

Para los casos en que el exponente sea mayor al índice (C > A) el exponente del factor racionalizante (FR) será la cantidad que le falta al exponente de la base para ser igual a un múltiplo del índice, es decir:

$\sqrt[A]{B^C}$, C > A

FR: $\sqrt[A]{B^{k-c}}$

Donde:

$k = \overset{\circ}{A}$

Observa el ejemplo 3.



Observación

Para la 1.ª forma de racionalización, es necesario el siguiente producto notable:

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Que se puede adecuar a:

$(\sqrt[2A]{B} \pm \sqrt[2A]{C})(\sqrt[2A]{B} \mp \sqrt[2A]{C}) = \sqrt[A]{B} - \sqrt[A]{C}$



Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$N=\left(\frac{\sqrt{m+n+2\sqrt{mn}}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)^2$$

Resolución:

Transformamos a radicales simples:

$$N=\left(\frac{\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right)^2$$

$$N=\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore N=1^2=1$$

2 Simplifica: $B=\sqrt{7-\sqrt{48}}$

Resolución:

Realizamos la transformación a radical simple:

$$B=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$$

$$B=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}$$

$$\therefore B=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

3 Efectúa:

$$A=\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{27}{\sqrt{27}}\right)^2$$

Resolución:

Racionalizamos ambas fracciones:

$$A=\left(\frac{3\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,.\sqrt{3}}+\frac{27\,.\sqrt{27}}{\sqrt{27}\,.\sqrt{27}}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}+\frac{27\sqrt{27}}{\sqrt{27^2}}\right)^2$$

$$A=\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}+\frac{27\sqrt{27}}{27}\right)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{27})^2=(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2$$

$$A=(4\sqrt{3})^2 \quad \therefore \quad A=48$$

4 Reduce:

$$\frac{3}{\sqrt{11-2\sqrt{28}}}+\frac{2}{\sqrt{16+2\sqrt{63}}}$$

Resolución:

$$\frac{3}{\sqrt{11-2\sqrt{28}}}+\frac{2}{\sqrt{16+2\sqrt{63}}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{(7+4)-2\sqrt{7\times 4}}}+\frac{2}{\sqrt{(9+7)+2\sqrt{9\times 7}}}$$

Pasamos a radicales simples:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$$

Racionalizamos:

$$\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}+\frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}$$

$$\frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}+\frac{2(3-\sqrt{7})}{2}=5$$

5 Racionaliza:

$$M=\frac{1}{\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}}$$

Resolución:

$$M=\frac{1}{\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}}$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{28-2\times 8\sqrt{3}}}}$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{28-2\sqrt{16.12}}}}$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{16}-\sqrt{12}}}=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\times 1}}}$$

$$M=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}=0{,}5(\sqrt{3}+1)$$

6 Reduce: $B=\sqrt{2\sqrt{7}+4\sqrt{3}}-\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$

Resolución:

$$B=\sqrt{2\sqrt{7}+4\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}$$

$$B=\sqrt{2\sqrt{7}+2\sqrt{2^2.3}}-\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{2^2.72}}}$$

$$B=\sqrt{2\sqrt{7}+2\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}$$

$$B=\sqrt{2\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4.3}}}-\sqrt{\sqrt{(9+8)+2\sqrt{9.8}}}$$

$$B=\sqrt{2(\sqrt{4}+\sqrt{3})}-\sqrt{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$$

$$B=\sqrt{2(2+\sqrt{3})}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$B=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3.1}}-\sqrt{(2+1)+2\sqrt{2.1}}$$

$$B=\sqrt{3}+1-(\sqrt{2}+1)$$

$$B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

7 Efectúa: $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

Resolución:

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(12+1)+2\sqrt{12\,.\,1}}}}$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{12}-1}}$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3\,.\,1}}}=2\sqrt{3+\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\,.\,1}}}$$

$$=2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2^2\,.\,2+2^2\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{2^2\,.\,3}}=\sqrt{8+2\sqrt{6\,.\,2}}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

CANTIDAD IMAGINARIA

Es el número que resulta de extraer la raíz de índice par a un número real negativo.

$$\sqrt[\text{Par}]{-} = \text{Imaginario}$$

Ejemplos:
- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\sqrt{-1} = \sqrt{2}\,i$

Propiedades

1. $i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i$; $n \in \mathbb{N}$
2. $(1+i)^2 = 2i;\ (1-i)^2 = -2i$
3. $(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$
4. $\frac{1+i}{1-i} = i \qquad \frac{1-i}{1+i} = -i$
5. $i^{\overset{\circ}{4}} + i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+2} + i^{\overset{\circ}{4}+3} = 0$
6. $i + i^2 + i^3 + ... + i^{4n} = 0$; $n \in \mathbb{N}$

Teoremas

$i^{-k} = (-1)^k\, i^k$; donde $k \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo: calcula: i^{-1286}

Resolución:
Según el teorema:
$i^{-1286} = (-1)^{1286}\, i^{1286} = +\, i^{\overset{\circ}{4}+2} = i^2 = -1$

$(\overset{\circ}{4} + r)^a = \overset{\circ}{4} + r^a$; $a \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

1. Calcula: i^{11^7}

   Resolución:
   Del teorema:
   $11^7 = (\overset{\circ}{4} - 1)^7 = \overset{\circ}{4} + (-1)^7 = \overset{\circ}{4} - 1 = \overset{\circ}{4} + 3$

   Luego: $i^{11^7} = i^{4^\circ + 3} = i^3 = -i$

2. Calcula: $i^{195\,861\,113}$

   Resolución:
   Verificamos la multiplicidad respecto a 4 del exponente; tomando las dos últimas cifras:
   $13 = \overset{\circ}{12} + 1 = \overset{\circ}{4} + 1$
   Luego:
   $i^{195\,861\,113} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i^1 = i$

3. Calcula: i^{22^7}

   Resolución:
   $i^{22^7} = i^{(20+2)^7} = i^{(\overset{\circ}{4}+2)^7} = i^{\overset{\circ}{4}+2^7} = i^{\overset{\circ}{4}+\overset{\circ}{4}} = i^{\overset{\circ}{4}} = 1$

Atención

La unidad imaginaria resulta de extraer la raíz cuadrada al negativo de la unidad.

$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

$i^1 = i^5 = i^9 = i$
$i^2 = i^6 = i^{10} = -1$
$i^3 = i^7 = i^{11} = -i$
$i^4 = i^8 = i^{12} = 1$



Recuerda

Se cumple:

$2^a = \overset{\circ}{4};\ a \geq 2;\ a \in \mathbb{N}$

$(\overset{\circ}{a} + k)^n = \overset{\circ}{a} + k^n;\ n \in \mathbb{N}$

NÚMERO COMPLEJO

Se llama número complejo a todo par ordenado (a; b) de componentes reales, el conjunto de los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$.

Notación: $z = (a;\ b) = a + bi;\ a \text{ y } b \in \mathbb{R}$

Al número "a" se le llama parte real de z: **a = Re(z)**
Al número "b" se le llama parte imaginaria de z:
b = Im(z)

Nota

- Usamos la letra $\mathbb{C}$ para designar al conjunto de los números complejos:

  $\mathbb{C} = \{z/z = a + bi;\ a \wedge b \in \mathbb{R}\}$

- Al número complejo: $z = a + bi$ se le conoce también como: **forma binómica** o **cartesiana del complejo.**

COMPLEJOS ESPECIALES

Opuesto de un complejo

De la forma cartesiana: $z = a + bi$; se define el complejo opuesto de z, denotado por: z^* como:

$$z^* = -a - bi$$

Ejemplos:
- $z = 3 + 5i \Rightarrow z^* = -3 - 5i$
- $R = \sqrt{3} - i \Rightarrow R^* = -\sqrt{3} + i$
- $H = \frac{1}{2}i \Rightarrow H^* = -\frac{1}{2}i$
- $E = 101 \Rightarrow E^* = -101$

Conjugado de un complejo

Son aquellos que tienen la misma parte real e imaginaria, pero su signo es contrario al de la parte imaginaria. De la forma cartesiana: $z = -a - bi$; se define el complejo conjugado de z, denotado por $\bar{z}$ como:

$$\bar{z} = -a + bi$$

Ejemplos:

- $z = 3 + 10i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 10i$
- $J = -10 + \sqrt{3}i \Rightarrow \bar{J} = -10 - \sqrt{3}i$
- $A = 3i \Rightarrow \bar{A} = -3i$
- $M = 3 \Rightarrow \bar{M} = 3$

Propiedades del conjugado: sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$

1. $z_1 = \bar{z}_1 \iff z_1$ es complejo real
2. $\bar{z}_2 = z_2^* \iff z_2$ es imaginario puro
3. $z_1 + \bar{z}_1 = 2\text{Re}(z_1)$
4. $z_2 - \bar{z}_2 = 2i\,\text{Im}(z_2)$
5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
6. $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$
7. $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n, \forall n \in \mathbb{N}$
8. $\left(\overline{\sqrt[n]{z}}\right) = \sqrt[n]{\bar{z}}, \forall n \in \mathbb{N}$
9. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \forall z_2 \neq (0; 0)$
10. $\bar{\bar{z}}_1 = z_1$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

A partir de los complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, definimos:

A) Adición

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo:
- $(7 + 2i) + (-3 + 10i)$
  $(7 - 3) + (2 + 10)i$
  $4 + 12i$

B) Sustracción

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:
- $(1 - i) - (20 + 3i) = (1 - 20) + (-1 - 3)i$
  $= -19 - 4i$

C) Multiplicación

$$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (cd + bc)i$$

Ejemplo:
- $(2 - 5i)(1 + 2i)$
  $(2 . 1 - (-5) . 2) + (2 . 2 + (-5) . 1)i$
  $12 - i$

D) División

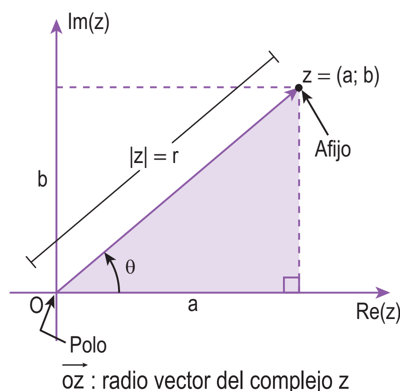
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i; \; z_2 \neq (0; 0)$$

Ejemplo:

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1.1 + 1(-1)}{1^2 + (-1)^2} + \left(\frac{1.1 - 1(-1)}{1^2 + (-1)^2}\right)i = i$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Todo número complejo, se puede representar por puntos en un plano, llamado plano complejo.



$\overrightarrow{oz}$: radio vector del complejo z

Argumento (θ): Arg(z)
Es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.

Del ⊿sombreado: $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

y al valor que cumple: $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ se le llama argumento principal.

Observación

Del binomio: $z = a + bi$

Si: $b = 0 \Rightarrow z = a + 0i = a$
Se llama:
Complejo real

Si: $a = 0 \Rightarrow z = 0 + bi = bi$
Se llama:
Complejo imaginario puro

Si: $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow z = 0$
Se llama:
Complejo nulo

Si: $a + bi = c + di$
$\Rightarrow a = c \wedge b = d$
Se llama:
Complejos iguales



Atención

Cada operación obedece a las leyes del álgebra de los números reales, pero en este caso hay dos excepciones:

1. $i^2 = -1$
   Esta propiedad no existe en el campo de los números reales.
2. $\sqrt{M}\sqrt{N} = \sqrt{MN}$
   $M > 0$ y $N > 0$
   Esta propiedad no se cumple para los números imaginarios.
   $\sqrt{-M}\sqrt{-N} \neq \sqrt{(-M)(-N)} = \sqrt{M.N}$
   El desarrollo correcto es:
   $\sqrt{-M}\sqrt{-N} = \sqrt{-1}\sqrt{M}\sqrt{-1}\sqrt{N}$
   $= i\sqrt{M}\,i\sqrt{N}$
   $= (-1)\sqrt{MN}$
   $= -\sqrt{MN}$

Nota

El afijo de un número complejo se representa por un par ordenado formado por la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria.

Al plano complejo se le llama también:
Diagrama de Argand



MÓDULO: |z| (VALOR ABSOLUTO DE UN COMPLEJO)

El módulo nos representa la magnitud del radio vector del número complejo.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propiedades: sean $z; z_1; z_2 \in \mathbb{C}$

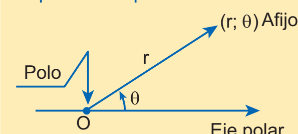
1. $|z| \geq 0;\ \forall\, z \in \mathbb{C}$
2. $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$
3. $z\,.\,\bar{z} = |z|^2$
4. $\left|\dfrac{z\,.\,z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z||z_1|}{|z_2|};\ |z_2| \neq 0$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
7. $|Re(z)| \leq |z|\ ;\ |Im(z)| \leq |z|$
8. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
9. $|z^n| = |z|^n;\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
10. $|\sqrt[n]{z}\,| = \sqrt[n]{|z|};\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

Observación

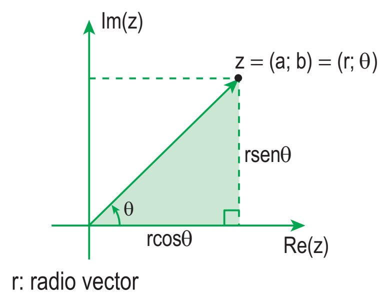
- El argumento principal de z se puede expresar en grados sexagesimales o radianes.

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

- Al argumento "θ" también se le denomina ángulo polar o amplitud.



FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO



r: radio vector

Del ◺ sombreado: $z = (a; b) = a + bi = r\cos\theta + (r\,\text{sen}\,\theta)i$

Luego, la forma trigonométrica de un complejo será:

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

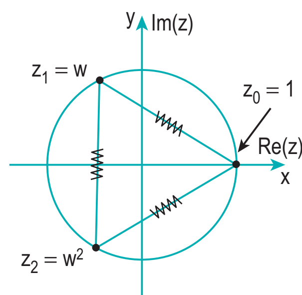
θ: argumento principal del complejo z.

Propiedades:

1. $|\text{cis}\,\theta| = 1$
2. $\text{cis}\,\theta_1 \times \text{cis}\,\theta_2 = \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$
3. $\dfrac{\text{cis}\,\theta_1}{\text{cis}\,\theta_2} = \text{cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$



RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD



Para este caso: $z = 1\ \Rightarrow |z| = 1$

$$\sqrt[3]{1} = (\cos 0° + i\,\text{sen}\,0°)^{1/3}$$

$$= \cos\left(\frac{0° + 360°k}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0° + 360°k}{3}\right)$$

Luego:

$k = 0$: $z_0 = \cos 0° + i\,\text{sen}\,0° = 1 + 0i = 1$

$k = 1$: $z_1 = \cos 120° + i\,\text{sen}\,120°$

$$= -\cos 60° + i\,\text{sen}\,60° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$$

$k = 2$: $z_2 = \cos 240° + i\,\text{sen}\,240°$

$$= -\cos 60° - i\,\text{sen}\,60° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$$

Nota

Veamos la forma exponencial de un complejo:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

θ: argumento en radianes

$\Rightarrow$ $z = |z|e^{\theta i}$

e = 2,718 ...

|z|: módulo del complejo z.

Propiedades

1. $w^{3n} = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $1 + w + w^2 = 0$
3. $1\,.\,w\,.\,w^2 = 1$
4. $w^{3n + r} = w^r;\ \forall n, r \in \mathbb{Z}^+$

EFECTUAR

Resuelve cada caso:

1. Encuentra el valor de:
   $J = \sqrt{-1}\,(\sqrt{-1} + 2) - 2i$
2. Halla el módulo de:
   $Z = (1 - i)^2 - (1 + 2i)(1 - 3i)$
3. Encuentra el valor de:
   $N = \sqrt{-1}\,(\sqrt{-1} + 5) - 4i$
4. Halla el módulo de:
   $Z = (i - 3)^2 + (i + 2)(2i + 1)$
5. Resuelve:
   $J = 3\sqrt{-1}\,(2\sqrt{-1} + 3) - 6i^2$
6. Halla a + b si:
   $Z = a + 3 + (b - 2)i$
   es un complejo nulo.
7. Resuelve:
   $E = 3\sqrt{-1}\,(4\sqrt{-1} + 3) - 9i$

Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$C=\frac{(1-i)^9}{1-i^9}+\frac{(1+i)^{13}}{1+i^{13}}+\frac{(1-i)^{17}}{1-i^{17}}$$

Resolución:

$(1-i)^9=[(1-i)^3]^3=[(1-i)^2(1-i)]^3$

$=[(-2i)(1-i)]^3=-8i^3(1-i)^2(1-i)=16(1-i)$

$(1+i)^{13}=[(1+i)^2]^6\,(1+i)$

$=(2i)^6(1+i)=-64(1+i)$

$(1-i)^{17}=[(1-i)^2]^8(1-i)$

$=(-2i)^8(1-i)=256(1-i)$

Usamos:

$i^{\overset{\circ}{4}+1}=i$ (en el denominador)

$C=\frac{16(1-i)}{1-i}-\frac{64(1+i)}{1+i}+\frac{256(1-i)}{1-i}$

$C=16-64+256$

$C=208$

2 Simplifica:

$B=i^2+\frac{1}{i}+i^8+(1+i)^2+(1-i)^2$

Resolución:

$B=-1+(-i)+1+2i-2i$

$B=-i$

3 Resuelve: $(1-i)^4$, donde: $i=\sqrt{-1}$.

Resolución:

$(1-i)^4=((1-i)^2)^2=(-2i)^2$

$\therefore (1-i)^4=-4$

4 Efectúa la siguiente operación:

$A=2(1+i)^{16}-(1-i)^{16}$

Resolución:

Del enunciado:

$A=2((1+i)^4)^4-((1-i)^4)^4$

$A=2(-4)^4-(-4)^4$

$A=2\,.\,4^4-4^4=4^4$ $\qquad\therefore A=256$

5 Halla: $E=w^2+3w$; siendo w y w^2 raíces cúbicas de la unidad.

Resolución:

$E=w^2+3w$

$E=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+3(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$E=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+(3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})i$

$E=-2+\frac{2\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore\ E=-2+\sqrt{3}\,i$

6 Si: w es una de las raíces cúbicas de la unidad , calcula:

$E=(w+1)(w^2+1)(w^3+1)(w^4+1)\ ...\ (w^{6n}+1)$

Resolución:

Se sabe que:

$w^3=1\Rightarrow w^3+1=1+1=2$

$w^4=w^3\,.\,w=w\Rightarrow w^4+1=w+1$

$w^5=w^3\,w^2=w^2\Rightarrow w^5+1=w^2+1$

$w^6=w^{3\,.\,2}=1\Rightarrow w^6+1=2$

Luego:

$E=(w+1)(w^2+1)\underbrace{(w^3+1)}_{2}\underbrace{(w^4+1)}_{w+1}\underbrace{(w^5+1)}_{w^2+1}\underbrace{(w^6+1)}_{2}\ ...(w^{6n}+1)$

$E=(w+1)(w^2+1)$ (2) $(w+1)(w^2+1)$ (2) ... "6n" factores

Agrupamos de tres en tres:

$E=\left((w+1)(w^2+1)(2)\right)^{\frac{6n}{3}}=\left((w+1)(w^2+1)2\right)^{2n}$

$E=\left((w^3+w+w^2+1)(2)\right)^{2n}=(\underbrace{w^2+w+1}_{0}+\underbrace{w^3}_{1})^{2n}\,.\,2^{2n}$

$E=2^{2n}=(2^2)^n=4^n$

$\therefore E=4^n$

7 Si: a, b y α, son números reales y:

$\frac{a+bi}{a-bi}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

entonces el valor de $\tan\alpha$ es:

Resolución:

Del enunciado:

$\frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

$\frac{(a+bi)^2}{a^2-(bi)^2}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

$\frac{a^2+2abi+b^2i^2}{a^2+b^2}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2ab}{a^2+b^2}}{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$



UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

SOLUCIÓN O RAÍZ DE UNA ECUACIÓN

Es aquel valor que toma la incógnita de la ecuación, que al reemplazarla en esta, se obtiene una igualdad numérica.

Así por ejemplo en:

$$2(x - 2) - (5 - x) = 4x + 10$$

$x = -19$ es solución o raíz de la ecuación, ya que al sustituirla en dicha ecuación:

$$2(-19 - 2) - (5 - (-19)) = 4(-19) + 10$$

se obtiene la igualdad numérica: $-66 = -66$

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN (CS)

Es el conjunto formado por todas las soluciones o raíces de una ecuación.
Así, para la ecuación del ejemplo anterior: $CS = \{-19\}$
Dos o más ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas raíces.

TIPOS DE ECUACIONES

Por el tipo de soluciones, las ecuaciones se pueden clasificar:

Compatible

Es aquella en donde su conjunto solución tiene por lo menos una solución.
Estas ecuaciones se subdividen en:

Compatible determinada
Aquella que permite un número finito de soluciones.
Ejemplo:
$3x + 2 = 2x - 1$, tiene como solución: -3

Compatible indeterminada
Aquella que permite un número infinito de soluciones.
Ejemplo:
$7x - 9 = 5x + 1 + 2x - 10$
$-9 = -9$ cuya solución es: $x \in \mathbb{R}$

Incompatibles o absurdas

Son aquellas que no admiten solución alguna.

Ejemplo: $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = \frac{7x}{10} + 10 \Rightarrow 2x + 5x = 7x + 100 \Rightarrow 0 = 100$ (absurdo)

$\therefore$ No hay valor alguno para x que satisfaga a la ecuación: $x \in \{\ \}$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO (ECUACIÓN LINEAL)

Una ecuación de primer grado con una incógnita, es aquella que puede reducirse a la forma general siguiente:

$ax + b = 0$; donde: a y b representan valores reales constantes.

Despejando la incógnita se obtiene la solución general: $x = -\frac{b}{a}$

Discusión de las soluciones

I. Si: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es: **compatible determinada** y su solución: $x = -\frac{b}{a}$ es única.

II. Si: $a = 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es: **incompatible**, no tiene solución: $x \in \varnothing$ o $x \in \{\ \}$

III. Si: $a = 0 \wedge b = 0$, la ecuación es: **indeterminada**, tiene infinitas soluciones, es decir, la ecuación verifica para todo valor que toma la incógnita x.

Ejemplo:

1. Calcula m si la ecuación es incompatible:
   $(m^2 - 25)x = (m - 3)^{m-1} - 16$

Resolución:

- Despejamos la variable: $x = \dfrac{\overbrace{(m-3)^{m-1} - 16}^{b}}{\underbrace{m^2 - 25}_{a}}$
- Para que sea incompatible:
  $(a = 0) \Rightarrow m^2 - 25 = 0 \Rightarrow m = \pm 5 \wedge b \neq 0$
- Reemplazamos el valor de m:
  $m = 5 \Rightarrow x = \frac{(5-3)^{5-1} - 16}{5^2 - 25} = \frac{0}{0}$ (Indeterminado)
  $m = -5 \Rightarrow x = \frac{(-5-3)^{-5-1} - 16}{(-5)^2 - 25} = \frac{cte}{0}$
  (Incompatible)

$\therefore m = -5$

Atención

- Si sumamos o restamos a ambos miembros de una ecuación un mismo término, resulta otra ecuación equivalente a la primera.

  Así:
  $3x + 2 = 5$
  $3x + 2 - 2 = 5 - 2$
  $3x = 3$
  $x = 1$

- Si multiplicamos o dividimos a ambos miembros de una ecuación por una expresión distinta de cero, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

  Así:

1. $\frac{6x - 1}{x + 2} = 1$

   Para que no se introduzcan soluciones extrañas, la expresión $(x + 2)$ se hará diferente de cero:

   $x + 2 \neq 0$
   $x \neq -2$

   Luego:
   $6x - 1 = x + 2$
   $5x = 3$
   $\therefore x = \frac{3}{5}$

2. $(x + 2)(x - 3) = 2(x + 2)$

   Para que no se cancelen soluciones, la expresión $(x + 2)$ se igualará a cero:

   $x + 2 = 0$
   $x = -2$

   Luego:
   $\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)} = \frac{2(x+2)}{(x+2)}$
   $x - 3 = 2$
   $x = 5$

   $\therefore x = 5$, $x = -2$



PLANTEO DE ECUACIONES

Para plantear y resolver ecuaciones es necesario comprenderlas a partir de las siguientes consideraciones:

Dígitos

- Representación de un guarismo de dos cifras o dígitos: $\overline{ab}$

  Su descomposición polinómica (DP) estará dada por: $\overline{ab} = 10a + b$.

- Representación de un guarismo de tres cifras o dígitos: $\overline{abc}$

  Su descomposición polinómica estará dada por: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

  Veamos algunas formas simbólicas establecidas sobre un número de dos o tres dígitos a partir de un enunciado verbal:

- El dígito de las decenas de un número de dos dígitos es 2 más que el dígito de las unidades: $\overline{(x+2)x}$.
- El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es 2 menos que el triple del dígito de las decenas: $\overline{x(3x-2)}$.
- El dígito de las unidades de un número de dos dígitos excede al dígito de las decenas en 1: $\overline{x(x+1)}$.

Ejemplo:

1. El dígito de las unidades de un número de dos dígitos excede al dígito de las decenas en 1. La suma de los dígitos es 9. Determina el número.

   Resolución:
   - Según el enunciado, el número será: $\overline{x(x+1)}$.
   - La suma de los dígitos: $x + (x+1) = 9 \Rightarrow x = 4$
   - El número será: $\overline{x(x+1)} = 45$.

Recuerda

- **Definición de igualdad.**
  Es la relación o comparación que nos indica que dos expresiones tienen el mismo valor.

  De esta manera se clasifican 2 tipos de igualdades:

  1. **Identidad** (igualdad absoluta)
     Es aquella que se verifica siempre, o sea que es evidente por sí misma, así:

     $(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$

     Si: $a = 2 \wedge b = 1$
     $\Rightarrow (2+1)^2 + (2-1)^2 \equiv 2(2^2+1^2)$
     $10 \equiv 10$

  2. **Ecuación** (igualdad condicional)
     Es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, las cuales verifican para ciertos valores de su variable.
     Así: $7x + 1 = 6x + 5$
     Cumple únicamente para: $x = 4$
     $7(4) + 1 = 6(4) + 5$
     $29 = 29$

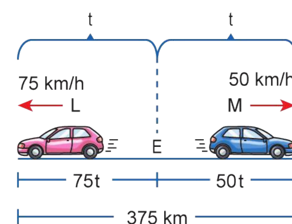


Móviles

Ejemplos:

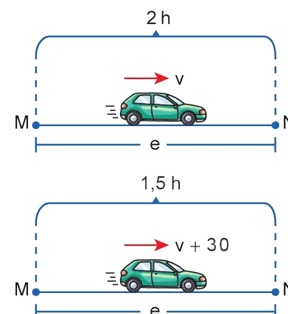
1. Maricarmen y Liana están en sus autos respectivos desplazándose en direcciones opuestas hasta su encuentro. A partir de ese instante se irán alejando, una de ellas viajando a 75 km/h y la otra a 50 km/h. ¿Cuántas horas pasarán antes de que se separen 375 km?

   Resolución:
   - Sea t el tiempo que pasará a partir del encuentro hasta estar separadas 375 km.
   - Representamos por:
     75t: el espacio recorrido por Liana (L).
     50t: el espacio recorrido por Maricarmen (M).
   - Observando el esquema, planteamos la ecuación con los datos que se conocen: la distancia o espacio total que recorrió cada móvil, suman 375 km:
     $75t + 50t = 375 \Rightarrow 125t = 375 \Rightarrow t = 3$ h
     $\therefore$ Luego de 3 h estarán separados 375 km.



2. Para ir de M a N, un móvil emplea 2 horas, si quisiera hacerlo en hora y media tendría que aumentar su velocidad en 30 km/h. Determina la distancia entre M y N.

   Resolución:
   - Denotamos por **e** al tramo MN que recorre el móvil.
   - Sabemos que:
     distancia = velocidad × tiempo
   - Los espacios recorridos en cada caso son iguales:
     $e = 2v = \frac{3}{2}(v+30) \Rightarrow 4v = 3v + 90 \Rightarrow v = 90$ km/h
   - Luego; el tramo MN es:
     $e = 2.v = (2h)(90 \text{ km/h}) = 180$ km



Problemas resueltos

1 Resuelve:

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$$

Donde: a, b, c $\in \mathbb{R}^+$.

Resolución:

$$\frac{x-a-b}{c}-1+\frac{x-b-c}{a}-1+\frac{x-c-a}{b}-1=0$$

$$\frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-b-c-a}{a}+\frac{x-c-a-b}{b}=0$$

Factorizamos $(x-a-b-c)$: $(x-a-b-c)\underbrace{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}_{\neq 0}=0$

$\Rightarrow x-a-b-c=0 \qquad \therefore x=a+b+c$

2 Halla n, para que la ecuación se reduzca a una de primer grado.

$$\frac{2nx-3}{x-1}+\frac{3nx-2}{x+1}=2n+3$$

Resolución:

Efectuamos:

$(2nx-3)(x+1)+(3nx-2)(x-1)=(2n+3)(x^2-1)$

$5nx^2-(n+5)x-1=(2n+3)x^2-2n-3$

Por dato deberá cumplir: $5n=2n+3 \Rightarrow n=1$

3 En una reunión, si los asistentes se sientan 13 en cada banca, se quedan 5 de pie, pero si se sientan 14 en cada banca, la última banca solo tendría 13 asistentes. ¿Cuántos asistentes hay en la reunión?

Resolución:

n.° de bancas: B

Caso 1: 13 por banca + 5 de pie = $\underbrace{13B+5}_{\text{total de asistentes}}$

Caso 2: 14 por banca + 13 en una banca = $14(B-1)+13$

Del enunciado: Caso 1 = Caso 2

$13B+5=14(B-1)+13=14B-1$

$5+1=14B-13B$

$6=B \quad \therefore$ Número de asistentes $=13B+5=13(6)+5=83$

4 Resuelve: $x-5+\frac{4}{x-6}=7-x+\frac{4}{x-6}$

Resolución:

$x-5-7+x=0 \Rightarrow 2x=12$

$x=6 \wedge x\neq 6 \Rightarrow x=\varnothing \qquad \therefore$ La ecuación es incompatible.

5 Un niño crece mensualmente 3 cm durante el primer año y 0,5 cm los meses siguientes (hasta los 18 años). ¿Cuánto medirá un niño a los **t** años y **r** meses de nacido, si nació midiendo 50 cm? $(1<t<18)$; $(1\leq r\leq 11)$

Resolución:

	1.er año	Nació	Siguientes **t** años y **r** meses
Medida:	3(12) cm	50 cm	0,5(12t + r)

Medida en **t** años y **r** meses:

$3(12)+50+0,5(12t+r)=86+6t+0,5r$

$\therefore$ Medida en t años y r meses: $(86+6t+0,5r)$ cm

6 Determina m + n, sabiendo que la ecuación en x:

$\frac{mx+1}{n}-\frac{x-2}{4}=x+2$, tiene infinitas soluciones.

Resolución:

Operamos:

$4mx+4-nx+2n=4n(x+2)$

$(4m-n)x+2n+4=4nx+8n \Rightarrow \underbrace{(4m-5n)}_{0}x=\underbrace{6n-4}_{0}$

Como tiene infinitas soluciones, entonces:

$6n-4=0 \Rightarrow n=\frac{2}{3}$

$4m-5n=0 \Rightarrow 4m=5n \Rightarrow m=\frac{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$

$\therefore n+m=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$

7 El dígito de las decenas, de un número de dos dígitos, es 4 más que el doble del dígito de las unidades. La suma de los dígitos es 10. Halla el número.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, representamos al número de dos dígitos como: $\overline{(4+2x)x}$

La suma de los dígitos es 10:

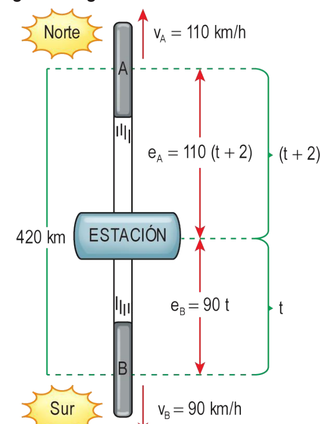
$(4+2x)+x=10 \Rightarrow 4+3x=10 \Rightarrow x=2$

El número será: $\overline{(4+2x)x}=(4+2(2))2=82$

8 Partiendo de una estación, un tren viaja al norte a la velocidad de 110 km/h. Dos horas después, otro tren parte de la misma estación hacia el sur a 90 km/h. ¿Cuántas horas transcurrirán antes de que se encuentren separados por una distancia de 420 km?

Resolución:

Se muestra el siguiente gráfico:



El espacio recorrido por cada tren deben sumar 420 km:

$110(t+2)+90t=420$

$11(t+2)+9t=42$

$11t+22+9t=42 \Rightarrow 20t=20$

$t=1$ h

Por lo tanto, han transcurrido 2 h + 1 h = 3 h para que se encuentren separados 420 km.

Nota

- El orden de una matriz viene dado por la representación $m \times n$ donde:
  m: es el número de filas
  n: es el número de columnas
- En el ejemplo mostrado, M es una matriz de orden 4×3.

MATRIZ

Es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas. Para representar a una matriz se utilizan letras mayúsculas.

Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 3 \\ \to 4 \end{matrix} \Big\} \text{Filas}$$

Columnas: 1, 2, 3 — 4×3

Forma general de una matriz de 3 filas y 3 columnas

Notación de Leibnitz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

En forma abreviada la matriz **a** se representa como:

$A = (a_{ij})_{3\times 3}$ $\quad$ $i = 1; 2; 3$ notación de Kronecker; $j = 1; 2; 3$

Donde a_{ij} es el elemento genérico, ubicado en la fila "i", columna "j".

Igualdad de matrices

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ del mismo orden (2×3), estas serán iguales $(A = B)$, si sus elementos correspondientes son iguales:

$$\begin{matrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} & a_{13} = b_{13} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} & a_{23} = b_{23} \end{matrix}$$

Operaciones con matrices

1. Adición

Dadas las matrices de igual orden: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \wedge B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Ejemplo:

- Determina la matriz $A + B$ a partir de: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & 5+2 \\ 1-5 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Multiplicación

- **Multiplicación de un escalar por una matriz**

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \wedge k \in \mathbb{R}$, se define $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$

Ejemplo:
Multipliquemos por 5 a la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 4} \Rightarrow 5A = 5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 3 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 25 & 50 \\ 15 & 15 & 40 & 45 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$



Recuerda

Matrices especiales

1. Matriz fila
   Es aquella que tiene una sola fila.
   $M = (5 \ -3 \ 2)_{1\times 3}$

2. Matriz columna
   Es aquella que tiene una sola columna.
   $N = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}_{4\times 1}$

3. Matriz rectangular
   Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son diferentes.
   $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

4. Matriz cuadrada
   Es aquella que posee igual número de filas e igual número de columnas.
   $A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$
   La matriz cuadrada A es de orden 2×2 o simplemente de orden 2.

5. Matriz nula
   Es aquella donde todos sus elementos son iguales a cero.
   $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$;
   $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$



- **Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna**

Sean: $A=[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}]_{1\times 4} \wedge B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41}\end{pmatrix}_{4\times 1}$; se define: $AB=[a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}]_{1\times 1}$

Ejemplo: multiplica A por B, donde: $A=[1\ \ 2\ \ 3] \wedge B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6\end{pmatrix}$

Resolución: $AB=[1\ \ 2\ \ 3]\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6\end{pmatrix}=[1\,.\,4+2\,.\,5+3\,.\,6]=4+10+18=32$

- **Multiplicación de matrices**

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por AB, si se verifica lo siguiente:

número de columnas de A = número de filas de B $\Rightarrow$ $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$ (iguales)

Ejemplo: dadas $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3\end{pmatrix}_{2\times 2} \wedge B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3}$, halla AB.

Resolución:

Como son iguales el número de columnas y filas de A, B, respectivamente, entonces es posible obtener AB.

$$AB=\begin{pmatrix} (5\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & (5\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & (5\ \ 2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \\ (-1\ \ 3)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} & (-1\ \ 3)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & (-1\ \ 3)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5(3)+2(4) & 5(1)+2(-1) & 5(2)+2(1) \\ (-1)3+3(4) & (-1)(1)+3(-1) & (-1)2+3(1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 23 & 3 & 12 \\ 9 & -4 & 1\end{pmatrix}$$



Observación

En el siguiente ejemplo ¿será posible multiplicar B . A?

$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3} \wedge$

$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3\end{pmatrix}_{2\times 2}$ Diferentes

$\Rightarrow$ No es posible obtener BA.

En general:

El producto matricial NO es conmutativo ($AB \neq BA$).

Teoremas

Sean A; B y C matrices para las cuales están definidas la adición y/o multiplicación, además el escalar $m \in \mathbb{R}$.

1. $A(B+C)=AB+AC$
2. $(A+B)C=AC+BC$
3. $ABC=(AB)C=A(BC)$
4. $m(A+B)=mA+mB$
5. $AB=0$, no implica que $A=0$ y $B=0$.
6. $AB=AC$, no implica que $B=C$.
7. AB no necesariamente es igual a BA.
8. Si: $A=B \Rightarrow AC=BC \wedge CA=CB$.

Para una matriz cuadrada A

$A^2=A\,.\,A$ $\quad A^3=A^2A=AA^2$ $\quad A^4=A^3A=AA^3$ $\quad A^n=AA^{n-1}=A^{n-1}A$

Recuerda

Propiedades

Sean las matrices A y B de modo que existen AB y BA.

I. Si $AB=BA$
$\Rightarrow$ A y B son matrices conmutables o permutables.

II. Si: $AB=-BA$
$\Rightarrow$ A y B son matrices anticonmutables o antipermutables.



Transpuesta de una matriz

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^T=(a_{ji})_{n\times m}$$

Ejemplos:

- $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & -10 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -10 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$
- $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Propiedades:

Siendo A y B matrices, y el escalar m.

1. $(A^T)^T=A$
2. $(mA)^T=mA^T$
3. $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$
4. $(AB)^T=B^TA^T$

Ejemplo:

Indica la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si **A** es una matriz de orden $n \times n$, entonces $A - A^T = 0$

II. Si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde **n** es un número natural.

III. Si: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{pmatrix}$ entonces $a - b = 0$.

Resolución:

I. Falsa (F)

Pues si: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donde: $A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

II. Verdadera (V)

- Procediendo por inducción:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AA$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2A$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; n \in \mathbb{N}$

III. Verdadera (V)

- Multiplicamos las matrices:

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4 \end{pmatrix}$

- Por igualdad de matrices:

$\begin{pmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{pmatrix}$

$a + 2b = 2 + a \;\wedge\; 3a + 2 = 5$

$b = 1 \qquad\qquad a = 1$

$\Rightarrow a - b = 0$

Atención

- A la suma de los elementos de la diagonal principal (DP) de una matriz cuadrada **A** se le denomina Traza de una matriz (Traz(A))

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ DP

$\text{Traz}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Propiedades:

1. $\text{Traz}(A+B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$
2. $\text{Traz}(mA) = m\text{Traz}(A)$; $\forall$ m escalar ($m \neq 0$)
3. $\text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA)$



Matrices cuadradas especiales

1. **Matriz diagonal.** Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros. Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	4. **Matriz triangular superior.** Es aquella matriz donde todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros. Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. **Matriz escalar.** Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales. Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	5. **Matriz triangular inferior.** Es aquella matriz donde todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros. Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3. **Matriz identidad o unidad.** Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad. Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	6. **Matriz simétrica.** Si una matriz es igual a su transpuesta, esta se llama matriz simétrica. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ Como: $A = A^T \Rightarrow$ A es simétrica

Atención

Dada la matriz:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

DS DP

Consideraciones:

- Toda matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas es de orden 3.
- La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de Diagonal principal (DP).
- La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de Diagonal secundaria (DS).



Observación

- En matrices la unidad (I) es la matriz identidad.



DETERMINANTES

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una **matriz cuadrada** la transforma en un escalar (número real).

Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así: $|A|, D_{(A)}, \text{Det}(A)$

Determinante de orden tres

Para calcular el valor de un determinante de tercer orden existen dos métodos: la regla de Sarrus y el método del menor complementario.

1. **Regla de Sarrus**
   Regla de Sarrus vertical
   1. Repetir la primera y segunda fila a continuación de la tercera.
   2. Se toma el producto de los tres elementos que conforman la diagonal principal y la de sus dos paralelas a ella, cada uno con su signo positivo; luego el producto de los tres elementos de la diagonal secundaria y las dos paralelas a la misma.
   Veamos el esquema:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Regla de Sarrus horizontal

En este caso se traslada las dos primeras columnas al final de la tercera y luego realizamos las multiplicaciones en dirección de las diagonales.

Veamos el esquema:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(− − − arriba; + + + abajo)

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo: examen de Admisión UNI 2002–I (matemática)

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si todos los elementos de una fila (o columna) de una matriz cuadrada son ceros, entonces su determinante es cero.

II. Si dos filas (o columnas) no nulas de una matriz cuadrada son iguales, entonces el determinante es diferente de cero.

Resolución:

I. Verdadera (V)

Aplicamos Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{vmatrix} = 0$$

II. Falsa (F)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ m & n & p & m & n \\ a & b & c & a & b \end{vmatrix} = anc + bpa + cmb - anc - bpa - cmb = 0$$

2. **Método de los menores complementarios (Regla de Laplace)**
   Este método se emplea para calcular determinantes de **cualquier orden** es por ello que es un método más general.

   Menor complementario de un elemento $|M_{ij}|$

   De la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden **n**, el menor complementario de $\mathbf{a_{ij}}$ denotado por: $|\mathbf{M_{ij}}|$ es el determinante de la matriz de orden (n – 1) que se obtiene al eliminar la i-ésima fila y j-ésima columna de la matriz A.

Recuerda

Determinante de orden dos:

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix}$$

$$|A| = ad - bc$$



Recuerda

- Solo se puede calcular determinantes a **matrices cuadradas.**



Nota

Del ejemplo también:

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 2(2) = -4$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 2(8) - 0(1) = 16$$

Adjunto de un elemento

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{ij}}$ denotado por $\boldsymbol{\phi_{ij}}$ se define: $\phi_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

Ejemplo:
Para la matriz del ejemplo anterior: $\phi_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^3(-50) = (-1)(-50) = 50$

En forma similar:

$\phi_{23} = (-1)^{2+3}(-4) = (-1)(-4) = 4$

$\phi_{21} = (-1)^{2+1}16 = (-1)16 = -16$

Teorema fundamental

El determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ será igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos adjuntos.

Veamos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Si consideramos la segunda fila: $a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}$

$$|A| = a_{21}\phi_{21} + a_{22}\,\phi_{22} + a_{23}\,\phi_{23} = a_{21}(-1)^{2+1}|M_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|M_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}|$$

$$= a_{21}(-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(+1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = -a_{21}(a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13}) + a_{22}\,(a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13}) - a_{23}(a_{11}\,a_{32} - a_{31}\,a_{12})$$

Ejemplo: examen de Admisión UNI 2002–I (matemática)

Sean a y b números enteros positivos pares; con estos números se forma la matriz:

$A = \begin{pmatrix} a & -b & -a \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$, si $|A + I| = 12$ (I: matriz identidad), calcula el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & 2a \\ b^2 & b \end{pmatrix}$.

Resolución:

- De la condición A + I: $A + I = \begin{pmatrix} a+1 & -b & -a \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 \end{pmatrix}$
- Tomando como línea fija a la columna 1: $\begin{matrix} a+1 & + \\ 0 & - \\ 1 & + \end{matrix}$

$$\begin{vmatrix} a+1 & -b & -a \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} = +(a+1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & b+1 \end{vmatrix} - 0 + (1)\begin{vmatrix} -b & -a \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(2(b+1) - 2) + (-2b - 2(-a))$$

$$= (a+1)(2b) - 2b + 2a = 2ab + \cancel{2b} - \cancel{2b} + 2a$$

(Dato) $\cancel{12} = \cancel{2}ab + \cancel{2}a$

$6 = ab + a$

$6 = a\,(b+1)$

$\downarrow\ \downarrow$

a	b+1
1	5
2	2
3	1

$\Rightarrow$ pares

- Luego, el determinante solicitado estará expresado como: $\begin{vmatrix} a & 2a \\ b^2 & b \end{vmatrix} = ab - 2ab^2 = 2(2) - 2(2)(2)^2 = -12$

Propiedades de los determinantes

1. Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, entonces su determinante es cero.

   Ejemplos:

   - $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

2. Si se permutan dos filas o columnas, el determinante cambia de signo.

   Ejemplo:

   Sean $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{vmatrix}$, donde las columnas 1 y 3 se han intercambiado, entonces: $|B| = -|A|$

Observación

Para los signos de los elementos de $(-1)^{i+j}$
- Si la suma i + j es par ⇒ +
- Si la suma i + j es impar ⇒ −

Por lo tanto, la matriz A admite el cuadro de signos:

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Y si fuese la matriz de orden n > 3, entonces:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$



Atención

- Para emplear menores complementarios, resumimos:
  1.° Realizar el cuadro de signos:
  $$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$
  2.° Elegir convenientemente la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.
  3.° El determinante de la matriz estará dado por la suma de los productos de cada elemento de la línea fija multiplicado por el determinante que resulta de eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

Nota

$|A^T| = |A|$

Problemas resueltos

1 Si: $A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$. Halla: Traz(A + 3B)

Resolución:

$$A+3B=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow A+3B=\begin{pmatrix}10 & 20\\ 17 & 22\end{pmatrix}$$

$\therefore$ Traz(A + 3B) = 10 + 22 = 32

2 Sean las matrices cuadradas X e Y que satisfacen:
$X + Y = B \ \wedge \ X + 2Y = A$; donde:
$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Calcula: Traz(XY)

Resolución:

$$\begin{matrix}X+Y=B\\ X+2Y=A\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}X=2B-A\\ Y=A-B\end{matrix}$$

Luego:

$$X=2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$XY=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 10\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

Nos piden: Traz(XY) = –2 – 6 = –8

3 Dada la matriz:

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Entonces podemos afirmar que A^{4n+1} es:

Resolución

La matriz se puede expresar como:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Luego, para diversos valores de su exponente:

$$A^2=AA=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(-2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-I$$

Donde:

$(A^4)^n=(-I)^n=(-1)^n I^n=(-1)^n(I)$

$A^{4n}.A=(-1)^n I.A=(-1)^nA \qquad \therefore\ A^{4n+1}=(-1)^nA$

4 Dadas las matrices: $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} \wedge N=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

El determinante de la matriz MN – NM es:

Resolución:

Calculamos las matrices por separado:

$$MN=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -11 & 4\end{pmatrix}$$

$$NM=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Luego: $MN-NM=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -11 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -7 & 1\end{pmatrix}$

Nos piden: $|MN-NM|=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -7 & 1\end{vmatrix}=(-1)(1)-(-7)(-1)=-8$

6 Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $P(A)=A^2-5A+6I$

Donde $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Entonces el determinante de P(A) es:

Resolución:

Determinamos cada matriz de P(A):

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$5A=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

Reemplazamos en P(A):

$$P(A)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ -5 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-5+6 & 2-5+0\\ -2+5+0 & 0-5+6\end{pmatrix}$$

$$P(A)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

El determinante de P(A) es:

$$|P(A)|=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=(1)(1)-(3)(-3)=10$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Nota

- **Solución de un sistema**
  Es el conjunto de valores de todas sus incógnitas que al ser sustituidas en las ecuaciones las convierte en identidades.
- **Sistemas equivalentes**
  Son aquellos que a pesar de tener ecuaciones diferentes aceptan las mismas soluciones.

DEFINICIÓN

Es el conjunto de ecuaciones que verifican simultáneamente para los mismos valores de sus incógnitas.
Son sistemas lineales:

(I) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$

$a_1; a_2; b_1; b_2, c_1$ y $c_2 \in \mathbb{R}$

Donde:

(I) Es un sistema de primer grado (lineal) con 2 ecuaciones y 2 variables o incógnitas (x; y).
(II) Es un sistema con 2 ecuaciones lineales y 2 variables (x; y).
(III) Es un sistema lineal con 2 ecuaciones, pero con 3 incógnitas (x_1; x_2 y x_3).

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Atendiendo a sus soluciones

A) Sistema compatible. Cuando existe solución.
Ejemplo:
El sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Es compatible: su solución es: $x = 4 \wedge y = 2$

B) Sistema incompatible. Cuando no existe solución.
Ejemplo:
El sistema: $\begin{cases} x - 7y = 2 \\ 5x - 35y = 9 \end{cases}$

Es incompatible, porque no hay valores x e y que lo verifiquen.

Observación

Se denominan ecuaciones independientes, si los coeficientes de una misma incógnita no son proporcionales.



Atendiendo al número de ecuaciones con el número de incógnitas

A) **Sistema compatible determinado** (solución única) se cumple cuando el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

B) **Sistema compatible indeterminado** (más de una solución) cuando el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas (no tiene solución única). $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

C) **Sistema incompatible** (imposible, absurdo, inconsistente, no admite solución, no tiene solución) cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Para resolver un sistema lineal emplearemos los siguientes criterios:

1. Criterio de sustitución

Ejemplo:
Una sala de espectáculos tiene capacidad para mil personas. El costo normal del derecho de ingreso es S/.10,00. Cuando una persona lleva un acompañante, este paga la mitad del costo normal del derecho de ingreso. Cierto día la sala estuvo completamente llena y se recaudó S/.8250,00. Los asistentes fueron solos y en pareja. ¿Cuántos espectadores más fueron en pareja que solos?

Examen de admisión UNI – 2001 – I

Resolución:

- La sala estuvo llena (1000 personas) : $x + 2y = 1000$ ...(1)
- Hubo una recaudación de S/.8250,00 : $10x + 15y = 8250$ ...(2)
- Despejamos x de la ecuación (1) : $x = 1000 - 2y$ ...(3)
- Simplificamos la ecuación (2), luego sustituimos la ecuación (3) en dicha simplificación :

$$2x + 3y = 1650$$
$$2(1000 - 2y) + 3y = 1650$$
$$2000 - 4y + 3y = 1650$$
$$y = 350 \quad ...(4)$$

Recuerda

Un sistema lineal se representa así:

$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$



- Sustituyendo (4) en (3) : $x = 1000 - 2y$
  $x = 1000 - 2(350) \Rightarrow x = 300$
- Nos piden : $2y - x = 2(350) - 300 \Rightarrow 2y - x = 400$

2. Criterio de igualación

Ejemplo:

Del sistema: $\begin{cases} 3^{x+1} - 2^y = 11 \\ 3^x + 2^{y+1} = 41 \end{cases}$ Halla: $\log_y x$

Resolución:

- Valiéndonos de la teoría de exponentes hacemos las transformaciones adecuadas : $3^{x+1} - 2^y = 11$
  $3^x . 3 - 2^y = 11$ ...(1)
  $3^x + 2^{y+1} = 41$
  $3^x + 2^y . 2 = 41$ ...(2)
- Haciendo: $3^x = P \wedge 2^y = Q$ obtenemos en (1) y en (2) respectivamente: $3P - Q = 11$ ...(3)
  $P + 2Q = 41$ ...(4)
- Despejamos la misma incógnita (P) de (3) y (4) respectivamente : $P = \frac{Q+11}{3}$ ...(5)
  $P = 41 - 2Q$ ...(6)
- Igualamos las ecuaciones (5) y (6) : $\frac{Q+11}{3} = 41 - 2Q$
  $Q + 11 = 123 - 6Q$
  $7Q = 112 \Rightarrow Q = 16$
- Reemplazamos el valor de Q en (6) : $P = 41 - 2Q$
  $P = 41 - 2(16)$
  $P = 41 - 32 \Rightarrow P = 9$
- Encontramos los valores de x e y en $3^x = P \wedge 2^y = Q$: $3^x = P \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$
  $\Rightarrow x = 2$
  $2^y = Q \Rightarrow 2^y = 16 \Rightarrow 2^y = 2^4$
  $y = 4$
- Nos piden: $\log_y x$, entonces : $\log_y x = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2}$



Recuerda

- Producto de bases iguales: Sumamos los exponentes:
  $a^m . a^n = a^{m+n}$
- A bases iguales $\Rightarrow$ igualamos exponentes:
  Si: $x^m = x^n \Rightarrow m = n$

Propiedades de los logaritmos:

- $\log_{a^m} a = \frac{1}{m} \log_a a = \frac{1}{m}$
- $\log_a^a = 1$

3. Criterio de reducción o de sumas y restas

Ejemplo:

En un libro de 700 páginas hay historias de ficción e historias reales. En cada diez páginas de historias de ficción hay 12 ilustraciones del tema, mientras que en cada diez páginas de historias reales hay 11 ilustraciones del tema. Si en total hay 810 ilustraciones en el libro, ¿cuántas ilustraciones más hay de un tema que de otro?

Resolución:

Sea P: historias de ficción y Q: historias reales; según el enunciado:

- Cantidad de ilustraciones de ficción : $F = \left(\frac{P}{10}\right)12 = \frac{12P}{10}$ ...(1)
- Cantidad de ilustraciones reales : $R = \left(\frac{Q}{10}\right)11 = \frac{11Q}{10}$ ...(2)
- El libro tiene 700 páginas : $P + Q = 700$ ...(3)
- El total de ilustraciones es 810 : $F + R = 810$ ...(4)
- Reemplazamos (1) y (2) en (4) : $\frac{12P}{10} + \frac{11Q}{10} = 810$
  $12P + 11Q = 8100$ ...(5)
- Nuestro sistema lineal formado está dado por (3) y (5) : $P + Q = 700$
  $12P + 11Q = 8100$



- Multiplicamos por (–12) a la ecuación (3) : $-12P - 12Q = -12(700)$
  $-12P - 12Q = -8400$ ...(6)
- Sumamos las ecuaciones (5) y (6) : $-Q = -300$
  $Q = 300$ ...(7)
- Reemplazamos (7) en (3) : $P + Q = 700$
  $P = 700 - 300$
  $P = 400$ ...(8)
- Reemplazamos los valores obtenidos de (7) y (8) en (1) y (2) : $F = \frac{12P}{10} = \frac{12}{10}(400) = 480$
  $R = \frac{11Q}{10} = \frac{11}{10}(300) = 330$
- Piden la diferencia de la cantidad de ilustraciones de los dos temas : $F - R = 480 - 330 = 150$
  $F - R = 150$

Observación

Las mismas soluciones se deben de obtener si se multiplica a la ecuación (3) por –11.



SISTEMA DE PRIMER GRADO CON TRES O MÁS INCÓGNITAS

Representación formal de un sistema de primer grado de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Donde:

$$\left.\begin{matrix} a_1; b_1; c_1 \\ a_2; b_2; c_2 \\ a_3; b_3; c_3 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$$

Nota

También se puede representar un sistema lineal (no necesariamente formal) de 5 ecuaciones con 5 incógnitas como:

$x + y + z = 2(u + v + 2)$
$u + y = z + v$
$u + x = 2 + z$
$u + v + x + y + z = 25$
$u + v = 7$

Procedimiento:

1. De una de las tres ecuaciones despejar una incógnita y reemplazarla en las otras dos.
2. Esas dos ecuaciones transformarlas a un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolverlas.
3. Las soluciones obtenidas se sustituyen en la ecuación de la incógnita despejada (paso 1), hallando así su valor.

Ejemplo:
Sea la terna (a; b; c), solución del sistema de ecuaciones:
$7x + 4y - 4z = 7$ ...(1)
$7y + 5z = 12$ ...(2)
$11y + 8z = 19$ ...(3)
Halla: $a + b + c$

Resolución:
- El procedimiento (1) no se aplica; ya está conformado el sistema dado por las ecuaciones (2) y (3):

  (2) Multiplicando miembro a miembro la ecuación (2) por 8 y a la ecuación (3) por 5, respectivamente:

  $56y + 40z = 96$ ...(4)
  $55y + 40z = 95$ ...(5)
- Restando las ecuaciones (4) – (5):
  $y = 1$ ...(6)
- Reemplazamos el valor de y en (2):
  $7y + 5z = 12$
  $7(1) + 5z = 12$
  $5z = 5$
  $z = 1$ ...(7)

  (3) Reemplazamos las soluciones de $y \wedge z$ en (1):
  $7x + 4y - 4z = 7$
  $7x + 4(1) - 4(1) = 7$
  $7x + 4 - 4 = 7$
  $x = 1$
- La solución: $(a; b; c) = (x; y; z) = (1; 1; 1)$, nos piden: $a + b + c = 1 + 1 + 1 = 3$



Observación

Una vez obtenida el sistema lineal (2) y (3) podemos emplear cualquier criterio de solución; se deja para el alumno comprobar las soluciones obtenidas con los criterios de:

Sustitución e igualación

Problemas resueltos



1 Halla:

$M = \sqrt{y + 2\sqrt{\frac{3}{2}x}}$

Si:

$5x + y = 25$

$6x + 2 = 26$

Resolución:

$5x + y = 25$ ...(1)

$6x + 2 = 26$ ...(2)

De (2): $6x = 24 \Rightarrow x = 4$

Reemplazamos $x = 4$ en (1): $5(4) + y = 25$

$\Rightarrow y = 5$

Hallamos M:

$M = \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{3}{2} . 4}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

$\therefore M = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

2 Resuelve:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ... (1)

$2x + 3y - z = 27$ ... (2)

y calcula el valor de xy.

Resolución:

En (1): $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$

$\Rightarrow x = 2k \ \wedge \ y = 3k \ \wedge \ z = 4k$

Reemplazamos en (2): $2(2k) + 3(3k) - (4k) = 27$

$4k + 9k - 4k = 27$

$k = 3$

$\therefore xy = (2k)(3k) = 6k^2 = 6(3)^2 = 54$

3 Halla m para que el sistema:

$(m - 3)x + 3y = 5$

$2x + (m - 2)y = 7$

sea inconsistente.

Resolución:

Del sistema se debe cumplir:

$\frac{m-3}{2} = \frac{3}{m-2}$

$m^2 - 5m + 6 = 6$

$\Rightarrow m = 5 \ \vee \ m = 0$ $\qquad \therefore m = 5 \ \vee \ m = 0$

4 Halla m para que el sistema:

$(3 - m)x + 5y = 4$ ... (1)

$2y - (2 - m)x = 6$ ... (2)

sea incompatible.

Resolución:

Para que el sistema sea incompatible se debe cumplir:

$\frac{3-m}{-(2-m)} = \frac{5}{2}$

$2(3 - m) = -5(2 - m)$

$6 - 2m = -10 + 5m$

$7m = 16$ $\qquad \therefore m = \frac{16}{7}$

5 Resuelve:

$5x + 3y = 22$

$3x - 2y = -2$

e indica: $\frac{x}{y}$

Resolución:

Por el método de igualación:

$x = \frac{22-3y}{5}$ ...(1)

$x = \frac{2y-2}{3}$ ...(2)

Igualamos:

$\frac{22-3y}{5} = \frac{2y-2}{3} \Rightarrow 66 - 9y = 10y - 10$

$19y = 76$

$y = 4$

Reemplazamos en (1):

$x = \frac{22-3(4)}{5} \Rightarrow x = 2$ $\qquad \therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

6 Dado el sistema:

$(k + 1)x + y = 3$

$2x + (k - 1)y = 1$

Halla k para que sea incompatible.

Resolución:

Si es incompatible se cumple: $\frac{k+1}{2} = \frac{1}{k-1} \neq 3$

$(k + 1)(k - 1) = 2 \Rightarrow k^2 - 1 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$

7 Calcula el valor de p para que el sistema:

$\begin{cases} (p^2 - 22)x + 7y = 5 \\ (p + 2)x + 4y = 2 \end{cases}$

sea incompatible, $(p \in \mathbb{R}^+)$.

Resolución:

Para que sea incompatible se cumple:

$\frac{p^2-22}{p+2} = \frac{7}{4} \neq \frac{5}{2}$

$4p^2 - 88 = 7p + 14$

$4p^2 - 7p - 102 = 0$

$4p \qquad 17$

$p \qquad -6$

$(4p + 17)(p - 6) = 0$

$p = -17/4 \ \vee \ p = 6$

$\therefore p = 6$ (por la condición)

8 En el sistema, calcula el valor de n para que sea incompatible.

$nx - 6y = 5n - 6$

$2x + (n - 7)y = 27 - 7n$

Resolución:

Para que el sistema sea incompatible se debe cumplir:

$\frac{n}{2} = \frac{-6}{n-7} \neq \frac{5n-6}{27-7n}$

De la igualdad tenemos:

$n(n-7) = -12 \Rightarrow n = 4 \ \vee \ n = 3$

Para n = 4 cumple la condición.

$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{20-6}{27-28}$

Para n = 3 no cumple con la condición.
Entonces: n = 4

9 Resuelve por el método de reducción y halla x + 2y.

$2x - 5y = -10$

$5x - 6y = -1$

Resolución:

$(6)(2x - 5y = -10)$

$(-5)(5x - 6y = -1)$

Entonces:

$12x - 30y = -60$

$-25x + 30y = 5$ (+)

$-13x = -55$

$x = \frac{55}{13}$

Hallamos y:

$2\left(\frac{55}{13}\right) - 5y = -10$

$-5y = -\frac{240}{13}$

$y = \frac{48}{13}$

Piden: $x + 2y = \frac{55}{13} + 2\left(\frac{48}{13}\right)$

$= \frac{151}{13}$

10 Halla el valor de **a** para que **x** sea igual a **y** en el sistema.

$ax + 4y = 119$

$5x - ay = 34$

Resolución:

Por condición:

$x = y$

$ay + 4y = 119$

$(a + 4)y = 119$ ...(1)

$5y - ay = 34$

$(5 - a)y = 34$ ...(2)

De (1) y (2) despejando **y** e igualando tenemos:

$\frac{119}{a+4} = \frac{34}{5-a}$

$595 - 119a = 34a + 136$

$153a = 459$

$a = 3$

11 Resuelve y calcula: x + y

$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 9$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 3$

Resolución:

$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 9$ ...(1)

$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 3$ ...(2)

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ a (1):

$\frac{x}{15} + \frac{y}{9} = 3$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 3$ (+)

$\frac{x}{15} + \frac{x}{3} = 6$

$\frac{6x}{15} = 6$

$x = 15 \ \wedge \ y = 18$

Piden: $x + y = 15 + 18 = 33$

12 Calcula x^2 en el siguiente sistema:

$x + y = 13$

$x + z = 17$

$y + z = 14$

Resolución:

Resolvemos:

$x + y = 13$ ... (I)

$x + z = 17$ ... (II)

$y + z = 14$ ... (III)

Sumamos: I, II y III

$2(x + y + z) = 44$

$x + y + z = 22$ ...(IV)

(III) en (IV):

$x + 14 = 22 \Rightarrow x = 8$

Nos piden: $x^2 = 64$

13 Halla el valor de $\sqrt{xy}$ del sistema:

$2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 14$

$4x - 9y = -56$

Resolución:

Resolvemos:

$2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 14$ ...(I)

$4x - 9y = -56$ ...(II)

(II) proviene de una diferencia de cuadrados:

$\underbrace{(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}_{14 \text{ (de I)}}(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = -56$

$14(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = -56$

$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -4$ ...(III)

Sumando (I) y (III):

$4\sqrt{x} = 10 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2}$

Reemplazamos en (I):

$2 \times \frac{5}{2} + 3\sqrt{y} = 14$

$3\sqrt{y} = 9 \Rightarrow \sqrt{y} = 3$

Nos piden: $\sqrt{xy} = \frac{5}{2} \times 3 = 7,5$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO PLANTEO DE ECUACIONES



ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son todas aquellas ecuaciones algebraicas que se reducen, a la forma general:

$ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$

Donde:
a; b; c: coeficientes
x: incógnita
ax^2: término cuadrático
bx: término lineal
c: término independiente

Nota

A las siguientes formas:

$ax^2 + c = 0;\ a \neq 0$

$ax^2 + bx = 0;\ a \neq 0$

Se les denomina:

ecuaciones de segundo grado incompletas.

Cálculo de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Completando cuadrados

Para aplicar este método es necesario que el coeficiente del término cuadrático sea 1. El procedimiento es convertir el trinomio $x^2 + bx + c$ en un binomio al cuadrado $(m + n)^2$.

Atento al procedimiento:

Determina las soluciones de la ecuación completando cuadrados: $\dfrac{x(x-3)}{2} + \dfrac{x(x-2)}{4} = \dfrac{(3x-2)^2}{8} - 1$

Resolución:

- Multiplicamos por 8 a ambos miembros de la ecuación: $4x(x-3) + 2x(x-2) = (3x-2)^2 - 8$

$$4x^2 - 12x + 2x^2 - 4x = 9x^2 - 12x + 4 - 8$$

$$0 = 3x^2 + 4x - 4$$

- No olvidar que el coeficiente del término cuadrático sea 1, para ello multiplicamos por $\frac{1}{3}$ a ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$$

- Formamos el trinomio cuadrado perfecto (tcp).
Dividimos al coeficiente del término lineal entre dos y luego lo elevamos al cuadrado; este nuevo término se suma y resta para no alterar la ecuación cuadrática.

$$\underbrace{x^2 + \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3.2}\right)^2}_{\text{tcp}} - \left(\frac{4}{3.2}\right)^2 - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0$$

- Por último hacemos uso de la identidad: suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\left(x + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow (x + 2)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$

- Siendo en este caso las soluciones: $x + 2 = 0 \ \vee\ x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = -2 \ \vee\ x = \frac{2}{3}$



Atención

Las raíces de la ecuación cuadrática: $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0$

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

también pueden obtenerse por:

- **Factorización (aspa simple)**

Ejemplo:

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

$3x \quad -2$

$x \quad +2$

$(3x - 2)(x + 2) = 0$

$3x - 2 = 0 \ \vee\ x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{3} \ \vee\ x = -2$

- **Fórmula general**

Veamos en el ejemplo:

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases}$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$

$x = \dfrac{-4 \pm 8}{6}$

$x_1 = \dfrac{-4+8}{6} \ \wedge\ x_2 = \dfrac{-4-8}{6}$

$x_1 = \dfrac{2}{3} \ \wedge\ x_2 = -2$

Análisis de las raíces

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, su discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$

Analicemos el discriminante:

A) Si $\Delta > 0$: la ecuación presenta dos raíces reales y diferentes $\Rightarrow x_1 \neq x_2$

B) Si $\Delta < 0$: la ecuación presenta dos raíces complejas y conjugadas $\Rightarrow x_1 = m + ni$

$$x_2 = m - ni = \bar{x}_1$$

C) Si $\Delta = 0$: La ecuación presenta dos raíces reales e iguales (es decir, tiene una única solución o una raíz doble).

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Propiedades de las raíces:

De la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ y asumiendo que sus soluciones son: x_1 y x_2 se presentan las siguientes propiedades:

Suma de raíces = $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Productos de raíces = $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a}$

Nota

Solo se pueden obtener raíces reales si el discriminante es positivo o cero:

$\Delta \geq 0$



Ejemplo:

La ecuación: $x^2 + 2(a + bi)x + c + di = 0$ presenta solo raíces reales, además: $d = 2ab$, determina el máximo valor de: $\dfrac{c + b^2}{a^2 + d}$

Resolución:

Del enunciado, se cumple para raíces reales: $\Delta \geq 0$

$\Delta = (2(a + bi))^2 - 4(c + di) \geq 0$

$a^2 + 2abi - b^2 \geq c + di$

Por condición del enunciado: $d = 2ab \Rightarrow d - 2ab = 0$

$a^2 - b^2 - c \geq \underbrace{(d - 2ab)}_{0 \text{ (dato)}}i$

$a^2 - b^2 - c \geq 0 \quad ...(1)$

Sabemos:

$x_1 . x_2 = c + di \in \mathbb{R}\ (x_1; x_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow d = 0$

Nos piden:

$\dfrac{c + b^2}{a^2 + d} = \dfrac{c + b^2}{a^2 + 0} = \dfrac{c + b^2}{a^2}$

De (1):

$a^2 - b^2 - c \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2 + c$

$\Rightarrow \dfrac{b^2 + c}{a^2} \leq 1 \qquad \therefore \left(\dfrac{c + b^2}{a^2 + d}\right)_{\text{máx.}} = 1$

PLANTEO DE ECUACIONES

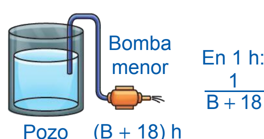
Sobre datos numéricos

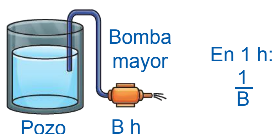
Ejemplo:

Cuando dos bombas actúan a la vez, tardan en agotar un pozo en 12 horas. Si actuara solo la menor, tardaría en agotarlo 18 horas más que si actuara solo la mayor. Determina el tiempo que le tomaría a la mayor en vaciarlo.

Las dos bombas la agotan en 12 h







Resolución:

- Según el enunciado establecemos:
  B + 18: tiempo en horas que tarda la bomba menor en agotar el pozo.
  B: tiempo en horas que tarda la bomba mayor en agotar el pozo.
- Donde: en 1 hora la mayor agota: $\dfrac{1}{B}$ partes del pozo y en 1 hora la menor agota $\dfrac{1}{B + 18}$ partes del pozo.
- Nos dicen: en 1 hora las dos bombas juntas agotan $\dfrac{1}{12}$ del pozo, luego: $\dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{B + 18} = \dfrac{1}{12}$

$B^2 - 6B - 12 . 18 = 0$

$B \quad -18$

$B \quad +12$

$(B - 18)(B + 12) = 0$

$B = 18 \vee B = -12$

$\therefore$ El tiempo que demora la bomba mayor en vaciar el pozo es de 18 horas.

Sobre móviles

Ejemplo:

Un motociclista empleó cierto tiempo para ir de un pueblo a otro, distantes entre si 378 km. Si la velocidad media hubiera sido 9 km más por hora, habría empleado una hora menos en recorrer la misma distancia. Determina la velocidad y el tiempo empleado.

Resolución:

- Sean: t: el tiempo en horas (h) que emplea en recorrer 378 km.
  v: la velocidad en (km/h) que emplea en recorrer 378 km.
- Se observa del gráfico (1): $vt = 378 \quad ...(1)$
- Asimismo, del gráfico (2): $(v + 9)(t - 1) = 378 \quad ...(2)$
- Como los espacios recorridos son iguales (1) = (2):
  $vt = (v + 9)(t - 1)$
  $v = 9(t - 1) \quad ...(3)$
- Reemplazamos (3) en (1): $9(t - 1)t = 378$
  $t^2 - t - 42 = 0$
  $t \quad +6$
  $t \quad -7$
  $t = -6 \vee t = 7$
  $\Rightarrow t = 7$ h
- Reemplazamos $t = 7$ en (3): $v = 9(7 - 1) = 9(6) = 54$ km/h

$\therefore$ la velocidad empleada es 54 km/h y el tiempo empleado es 7 h para recorrer 378 km.

Gráfico 1

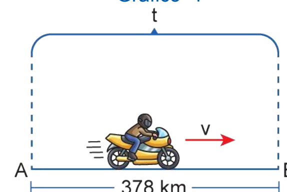
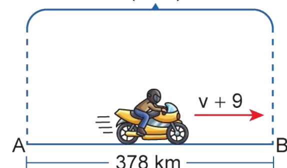


Gráfico 2



Atención

Suma de raíces:

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-2b}{2a}$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Producto de raíces:

$x_1 . x_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$= \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} = \dfrac{4ac}{4a^2}$

$x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$



Problemas resueltos

1 Sean α y β raíces de la ecuación:
$x^2 + nx - 2n = 0$; además: $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 16$
Halla n.

Resolución:

Del dato:

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 16$

$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 16$

$\alpha\beta + \alpha + \beta = 15$ ...(I)

Sabemos:

$\alpha\beta = \dfrac{-2n}{1} = -2n$ ...(II)

$\alpha + \beta = \dfrac{-n}{1} = -n$ ...(III)

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

$-2n - n = 15$

$-3n = 15$

$\therefore n = -5$

2 Si: $3x^2 + mx + 3 = 0$, tiene raíces iguales, halla el valor de $(m^3 + 1)$, siendo: $(m < 0)$

Resolución:

De la ecuación:

$3x^2 + mx + 3 = 0$

Si tiene raíces iguales, entonces: $\Delta = 0$

$\Delta = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$m^2 - 4(3)(3) = 0$

$m^2 = 36 \Rightarrow m = 6 \vee m = -6$

Por condición $m < 0$

$\Rightarrow m = -6 \quad \therefore m^3 + 1 = (-6)^3 + 1 = -215$

3 Halla el valor de m en la ecuación cuadrática:
$2mx^2 - (4m + 2)x + 35 = 0$.
Si la suma de sus raíces es $\frac{7}{3}$.

Resolución:

De la ecuación:

$\overbrace{2m}^{a}x^2 - \overbrace{(4m+2)}^{b}x + 35 = 0$

Sabemos que: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{7}{3}$

$\dfrac{-[-(4m+2)]}{2m} = \dfrac{7}{3}$

$6m + 3 = 7m \Rightarrow m = 3$

4 Si x es un número complejo, calcula la parte imaginaria de una de las soluciones de: $x^2 - 2x + i = 0$

Resolución:

$x^2 - 2x + i = 0$

Resolvemos:

$x^2 - 2x + 1 + i = 1$

$(x - 1)^2 + i = 1$

$(x - 1)^2 = 1 - i$

Entonces:

$x = 1 \pm \sqrt{1-i} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}}$ (forma exponencial de un complejo)

$x = 1 \pm \sqrt[4]{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}i} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)$ (forma trigonométrica de un complejo)

Luego:

$\mathrm{Im}(x) = \pm\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8} = \pm\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\frac{45°}{2}$ (parte imaginaria de x)

$\mathrm{Im}(x) = \pm\sqrt[4]{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)$

$\mathrm{Im}(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

Por lo tanto, la parte imaginaria de una de las soluciones es: $\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$

5 Halla m para que las raíces de la ecuación sean reales y diferentes.
$x^2 + 8x + m = 0$

Resolución:

Para que las raíces sean reales y diferentes: $\Delta > 0$

Veamos:

$x^2 + 8x + m = 0$

$8^2 - 4(m) > 0$

$4m < 64$

$m < 16 \qquad \therefore m \in \langle -\infty; 16\rangle$

6 Indica la naturaleza de las raíces de:
$5x^2 - 2x + 7 = 0$

Resolución:

Analizamos el discriminante:

$\Delta = (-2)^2 - 4(5)(7)$

$\Delta = 4 - 140$

$\Delta = -136 < 0$

Por lo tanto, tiene raíces complejas y conjugadas.

7 Encuentra el conjunto solución de la siguiente ecuación:
$|x^2 - 3| = x + 1$

Resolución:

$x^2 - 3 = x + 1 \quad \vee \quad x^2 - 3 = -x - 1$

$x^2 - x - 4 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 2 = 0$

x 2
x −1

Por fórmula general:

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-4)}}{2(1)} = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$

$\therefore CS = \left\{\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2};\ 1;\ 2\right\}$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

RELACIÓN DE ORDEN

Es una comparación que se establece entre dos elementos de un mismo conjunto.

DESIGUALDAD

Es una relación de orden que se establece entre dos números reales.

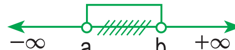
Intervalos

Es un conjunto de infinitos elementos que representa a todos los números reales comprendidos entre dos extremos.
Existen dos tipos de intervalos:

1. Intervalo acotado

Será acotado si los extremos son números reales (finitos). A su vez puede ser:

I. Intervalo abierto



$\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

II. Intervalo cerrado



$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

III. Intervalo abierto en "a" y cerrado en "b"



$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

IV. Intervalo cerrado en "a" y abierto en "b"

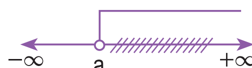


$[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

2. Intervalo no acotado

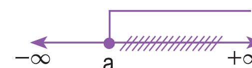
Llamamos así cuando por lo menos uno de los extremos son los infinitos $-\infty$ o $+\infty$.

I.



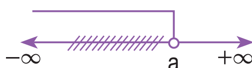
$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

II.



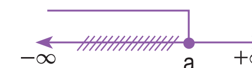
$[a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

III.



$\langle -\infty; a\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

IV.



$\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

V.



$\langle -\infty; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < +\infty\}$

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las desigualdades del tipo $ax^2 + bx + c \gtrless 0$; $a \neq 0$ se denominan inecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Teorema del trinomio positivo ($\Delta < 0$)

Dado el trinomio: $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a; b; c $\in \mathbb{R}$ cuyo discriminante es negativo ($\Delta < 0$) y $a > 0$, entonces este polinomio será positivo.

$$ax^2 + bx + c > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Se deben cumplir las dos condiciones mutuamente excluyentes:

$$a > 0\ \wedge\ \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Atención

- Veamos las siguientes relaciones:

  La relación **mayor o igual que** ($\geq$):

  $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

  La relación **menor o igual que** ($\leq$):

  $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

  Estas definiciones para que sean verdaderas es suficiente que se verifique una de sus condiciones.

- Siendo $a \in \mathbb{R}$, se establece:

  a es positivo $\Leftrightarrow$ **a** > 0
  a es negativo $\Leftrightarrow$ **a** < 0
  a es no positivo $\Leftrightarrow$ **a** ≤ 0
  a es no negativo $\Leftrightarrow$ **a** ≥ 0



Nota

Por abreviatura; el símbolo $\gtreqless$ significa también: >; <; ≥ ó ≤



Observación

La solución de una inecuación cuadrática depende exclusivamente de su coeficiente principal y de su discriminante.



Ejemplo:

1. Determina el conjunto solución de: $5x^2 - x + 2 < 0$

   Resolución:

   1.ª Forma

   - Según el teorema, analicemos: $5x^2 - x + 2 < 0$
     $a > 0 \Rightarrow 5 > 0 \;\wedge\; \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(5)(2) = -39 < 0$
   - Como se observa su coeficiente principal y su discriminante cumplen con el teorema más no así el propio trinomio respecto a su sentido en la desigualdad que por condición del ejemplo es negativo: $5x^2 - x + 2 < 0$
   - El polinomio es positivo, por consiguiente $x \in \varnothing$.



Atención

Teorema del trinomio negativo

Siendo: $a; b; c \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0; \forall x \in \mathbb{R}$
será negativo:

$\Longleftrightarrow$ $a < 0 \wedge \Delta = b^2 - 4ac < 0$

INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Son aquellas inecuaciones cuyos términos están ordenados de la siguiente manera:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \gtreqless 0$$

Donde: $a_0 > 0$: coeficiente principal (C.P.); $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$

Escrito de otra manera, la inecuación puede ser:

$$(x - PC_1)(x - PC_2)(x - PC_3)\ldots(x - PC_n) \gtreqless 0 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde: $PC_1; PC_2; PC_3; \ldots PC_n$ son los denominados puntos críticos.

Sigue los siguientes pasos para encontrar el conjunto solución.

I. El coeficiente principal debe ser positivo ($a_0 > 0$), de lo contrario cambia de signo a todos los términos de la desigualdad multiplicando por (-1) y verifica que en el segundo miembro figure el cero.

II. Factoriza el polinomio para determinar sus raíces, denominándose ahora puntos críticos (PC), el punto crítico se determina igualando parcialmente cada factor a cero.

III. Los puntos críticos ubicarlos en forma ordenada en la recta numérica real formando intervalos y así de esta manera analizar los signos del polinomio.

IV. Una vez colocados estos intervalos, asignamos signos positivos y negativos en forma alternada empezando del extremo derecho pero con signo positivo.





Recuerda

- El otro método para resolver una inecuación cuadrática es la de los puntos críticos ($\Delta > 0$).

V. Si la inecuación tiene sentido mayor que cero, la solución estará dada por la unión de los intervalos positivos.

VI. Si la inecuación tiene sentido menor que cero, la solución estará dada por la unión de los intervalos negativos.

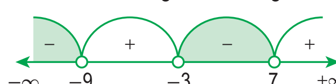
VII. Ten en cuenta que si la inecuación es $<$ o $>$; los intervalos son abiertos; si son $\leq$ o $\geq$ los intervalos son cerrados.

Ejemplos:

1. Determina el conjunto solución de:
   $x^3 + 5x^2 - 57x - 189 < 0$

   Resolución:

   - Un cero racional (punto crítico) del polinomio es: $x = -3$, luego factorizamos por Ruffini:
     $(x + 3)(x^2 + 2x - 63) < 0$
     $x \quad -7$
     $x \quad +9$
   - Factorizamos el trinomio:
     $(x + 3)(x - 7)(x + 9) < 0$
   - Utilizamos el criterio de los puntos críticos:
     $$\left.\begin{array}{l} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \\ x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \end{array}\right\} PC$$
   - Los ubicamos en la recta numérica real y hacemos uso de la regla de los signos:



   - El conjunto solución será la unión de los intervalos con signo negativo (–):
     $CS = \langle -\infty; -9 \rangle \cup \langle -3; 7 \rangle$

Nota

- Los posibles ceros racionales (PCR) del polinomio: $x^3 + 5x^2 - 57x - 189$ son:

$$PCR = \pm\left\{\frac{\text{Divisores términos Indep.}}{\text{Divisores C.P.}}\right\}$$

$PCR = \pm\{1; 3; 7; 9\}$

Nota

Tengamos en cuenta las propiedades fundamentales de las desigualdades:

1. $\forall$ a; b y m $\in \mathbb{R}$, se cumple:

$a > b \Rightarrow a \pm m > b \pm m$

2. $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}$ $\wedge$ m $\in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$a > b \Rightarrow am > bm$
$a > b \Rightarrow \frac{a}{m} > \frac{b}{m}$

3. $\forall$a; b $\in \mathbb{R} \wedge$ m $\in \mathbb{R}^-$, se cumple:

$a > b \Rightarrow am < bm$
$a > b \Rightarrow \frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

4. Si a y b tienen el mismo signo, se cumple:

$a < x < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

5. $\forall$ a; b $\in \mathbb{R}^+$ y n $\in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$a > b \Rightarrow a^n > b^n$

6. $x^{2n} \geq 0$; $\forall$ x $\in \mathbb{R}$; n $\in \mathbb{Z}$

7. Sea: B > 0
Si:

$A^2 \leq B \Rightarrow -\sqrt{B} \leq A \leq \sqrt{B}$

$A^2 > B \Rightarrow A < -\sqrt{B} \vee A > \sqrt{B}$

8. $\forall$ a; b; c; d $\in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

9. a; b; c $\in \mathbb{R}$ se establece la transitividad:

Si: $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

10. a; b $\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$

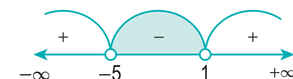


Atención

De la condición: $0 < b < a$
$(-1)0 < (-1)b < (-1)a$
$-a < -b < 0$
Esta desigualdad nos ayudará a ubicar sobre la recta real en forma ordenada los valores: $-a$; $-b$ y 0.

2. Determina el conjunto solución de:
$(x + 3)^8(x + 5)(x - 1)(x - 20)^{18} < 0$

Resolución:
- Simplificamos los factores con exponente par porque siempre van a ser positivos estos son: $(x + 3)^8$ y $(x - 20)^{18}$
$\Rightarrow x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 20$
- Entonces nos queda: $(x + 5)(x - 1) < 0$
- Usamos el criterio de los puntos críticos:
$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- En la recta numérica real:



- Obtenemos el conjunto solución (CS):
$CS = \langle -5; 1\rangle - \{-3\}$

INECUACIÓN RACIONAL

Son aquellas inecuaciones fraccionarias que se pueden presentar como:

A) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ B) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ C) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ D) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

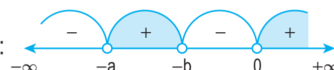
Donde para todos los casos: Q°(x) ≥ 1
La condición necesaria y suficiente para la solución respectiva es que cuando se factoriza Q(x), sus valores críticos en los intervalos respectivos siempre serán considerados "abiertos", es decir, intervalos abiertos.
El método práctico a emplear es el de los puntos críticos.

Ejemplo:
Dada la inecuación:
$\frac{x - a}{x + a} < \frac{x - b}{x + b}$, con $0 < b < a$. Su solución es la unión de dos intervalos, siendo uno de ellos:

Resolución:
- Sumamos $-\frac{x - b}{x + b}$ a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{x - a}{x + a} - \frac{x - b}{x + b} < \frac{x - b}{x + b} - \frac{x - b}{x + b} \Rightarrow \frac{x - a}{x + a} - \frac{x - b}{x + b} < 0 \Rightarrow \frac{-2(a - b)x}{(x + a)(x + b)} < 0$$

- Como dato tenemos que $a - b > 0$, entonces multiplicamos por $-\frac{1}{2(a - b)}$: $\frac{x}{(x + a)(x + b)} > 0$
- Por el criterio de los puntos críticos:
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$
$x + b = 0 \Rightarrow x = -b$
- En la recta real:



- Como respuesta, uno de los intervalos puede ser: $\langle -a; -b\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

Regla práctica para acotar intervalos

Como regla práctica si hay intervalos con extremos negativos; uno negativo y el otro positivo, etc. y estas por condición del problema son necesarios sus cuadrados respectivos, tenga en cuenta lo siguiente.

Veamos con ejemplos:

1. Si: $-3 \leq x \leq 0 \Rightarrow$ (recta: $-\infty$, -3, 0, $+\infty$; $(\ )^2$; recta: $-\infty$, 9, 0, $+\infty$)

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow$ (recta: $-\infty$, 0, x^2, 9, $+\infty$)

Ten presente que el intervalo izquierdo siempre toma el menor valor y el derecho el mayor valor, si $x \in \mathbb{R}^-$.

2. $-9 \leq x < -2 \Rightarrow$ (recta: $-\infty$, -9, x, -2, $+\infty$)

$\Rightarrow 4 < x^2 \leq 81 \Rightarrow$ (recta: $-\infty$, 4, x^2, 81, $+\infty$)

Si: $-2 < x < 0 \Rightarrow\ ? \leq (1 + x)^2 \leq\ ?$

$-1 < 1 + x < 1 \Rightarrow$ (recta: $-\infty$, -1, 1, $+\infty$)

En este caso se tiene que:

(recta: $-\infty$, -1, 0, x^2, 1, $+\infty$)

Considerar al cero.

$\Rightarrow 0 \leq (1 + x)^2 < 1$

Problemas resueltos

1 Si $m \geq -x^2 + 3x + 12$, ¿cuál es el menor valor entero que puede asumir m?

Resolución:

$m \geq -x^2 + 3x + 12 \Rightarrow x^2 - 3x + (m - 12) \geq 0$

Sabemos:

$P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a > 0 \wedge \Delta \leq 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(m - 12) \leq 0$

$9 - 4m + 48 \leq 0$

$57 \leq 4m \Rightarrow m \geq 14{,}25$

$\therefore\ m_{mín.} = 15$

2 Si a; b y c > 0, calcula el mínimo valor de: $E = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Resolución:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1 \quad (MA \geq MG\ \forall\ \mathbb{R}^+)$$

$\Rightarrow E = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ $\qquad \therefore E_{mín.} = 3$

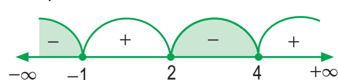
3 Efectúa: $(x - 4)(2 - x)(x + 1) \geq 0$

Resolución:

Multiplicamos por (–1) a la desigualdad, se tendrá:

$(x - 4)(x - 2)(x + 1) \leq 0$

Los puntos críticos son: –1, 2, 4



Luego:

$\therefore x \in \langle -\infty; -1] \cup [2; 4]$

4 Resuelve: $x^3 + x^2 \leq 4x + 4$

Resolución:

$x^3 + x^2 - 4x - 4 \leq 0$

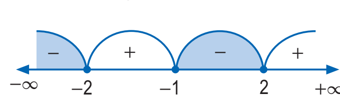
$x^2(x + 1) - 4(x + 1) \leq 0$

$(x^2 - 4)(x + 1) \leq 0$

$(x - 2)(x + 2)(x + 1) \leq 0$

Puntos críticos: –2; –1, 2

Analizamos gráficamente:



Como la inecuación es negativa ≤ 0 trabajaremos con las zonas negativas:

$\therefore x \in \langle -\infty; -2] \cup [-1; 2]$

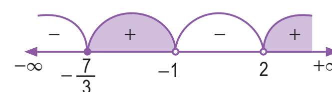
5 Resuelve: $\frac{3x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \geq 3$

Resolución:

$$\frac{3x^2 + 1 - 3(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

$$\frac{3x^2 + 1 - 3x^2 + 3x + 6}{x^2 - x - 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x + 7}{(x - 2)(x + 1)} \geq 0$$

Puntos críticos: $\frac{-7}{3}$; – 1; 2



Como la inecuación es positiva el conjunto solución estará formado por las zonas positivas:

$\therefore x \in [-7/3; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

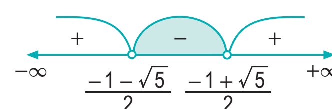
6 Resuelve: $x^2 + x - 1 \leq 0$

Resolución:

Calculamos el discriminante: $\Delta = (1)^2 - 4(-1) \Rightarrow \Delta = 5$

Hallamos los puntos críticos:

$$x_{1;\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$



$$\therefore\ CS = \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2};\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$$

7 Si C es el conjunto solución de la inecuación:

$2x^2 - x - 3 < x^2 - 1 < 3x - 1$

Entonces el conjunto C es:

Resolución:

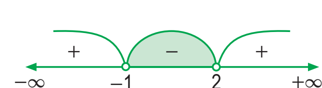
La inecuación dada es:

- $2x^2 - x - 3 < x^2 - 1$

  $x^2 - x - 2 < 0$

  $(x - 2)(x + 1) < 0$

Gráficamente:

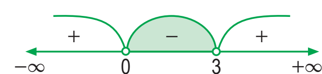


$\Rightarrow CS = \langle -1; 2\rangle$ ...(1)

- $x^2 - 1 < 3x - 1$

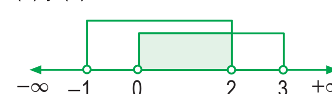
  $x^2 - 3x < 0$

  $x(x - 3) < 0$



$\Rightarrow CS = \langle 0; 3\rangle$ ...(2)

Intersectamos (1) y (2):



$\therefore C = \langle 0; 2\rangle$

8 Calcula el conjunto solución de la inecuación:

$(x - 2^{-2})^2 + 4x + 2 < 0$

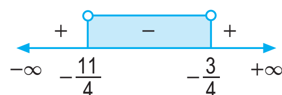
Resolución:

$$(x - 2^{-2})^2 + 4x + 2 < 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 4x + 2 < 0$$

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + 4x + 2 < 0 \Rightarrow x^2 + \frac{7x}{2} + \frac{33}{16} < 0$$

$16x^2 + 56x + 33 < 0 \Rightarrow (4x + 3)(4x + 11) < 0$

PC: $x_1 = -\frac{3}{4} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{11}{4}$



$\therefore CS \in \left\langle -\frac{11}{4}; -\frac{3}{4} \right\rangle$

9 La inecuación $x^2 - 2bx - c < 0$ tiene como conjunto solución $\langle -3; 5 \rangle$, halla b + c.

Resolución:

Como su conjunto solución es $x \in \langle -3; 5 \rangle$, entonces:

$x_1 = -3 \wedge x_2 = 5$

x_1; x_2 son las raíces de la inecuación; que con estas formaremos su inecuación respectiva.

$(x + 3)(x - 5) < 0$

$x^2 - 2x - 15 < 0$ ...(1)

Compara la inecuación (1) con la del dato.

$x^2 - 2bx - c < 0$ (dato)

Identificando los términos obtenemos los valores de b y c.

$b = 1 \wedge c = 15$

Nos piden "b + c", luego.

$b + c = 1 + 15 = 16$

10 Determina el conjunto solución de: $(x^2 + 1)(x - 2)(x + 7) \geq 0$

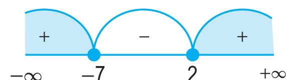
Resolución:

Simplificando, la inecuación queda: $(x - 2)(x + 7) \geq 0$

Igualamos cada factor a cero:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \wedge x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

Ubicamos ordenadamente en la recta real:



$\therefore$ El conjunto solución será: $CS = \langle -\infty; -7] \cup [2; +\infty \rangle$

11 Resuelve: $\left(x - \frac{1}{7}\right)^5 \left(x + \frac{1}{5}\right)^9 (x - 8)^2 (10 - x)(x + 1)(x - 3) > 0$

Resolución:

Existen factores repetidos, procedemos de la siguiente manera.

$\left(x-\frac{1}{7}\right)^4\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)^8\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-8)^2(10-x)(x+1)(x-3) > 0$

Simplificamos los factores con exponente par (pues siempre serán positivos), siempre que: $x \neq \frac{1}{7}$; $x \neq -\frac{1}{5}$ y $x \neq 8$

$\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)(10 - x)(x + 1)(x - 3) > 0$

Fíjate que el tercer factor tiene a la incógnita precedida del signo menos, en estos casos se sugiere factorizar el signo (–) y luego multiplicar por (–1) a ambos miembros de la desigualdad, que cambiará de sentido:

$-\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 10)(x + 1)(x - 3) > 0$

$\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 10)(x + 1)(x - 3) < 0$

Según el criterio de los puntos críticos.

$x - \frac{1}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$

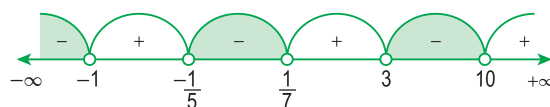
$x + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

$x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

En forma ordenada estos puntos críticos los ubicamos en la recta real, hacemos uso de la regla de los signos:



La incógnita x tomará cualquier valor que pertenezca a la unión de los intervalos que están con signo (–), ya que la desigualdad final tiene signo (<):

$\therefore x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \left\langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{7} \right\rangle \cup \langle 3; 10 \rangle - \{8\}$

12 Determina el conjunto de valores del número real r tal que la función $f(x) = (rx^2 - 2rx + 1)^{-1}$, esté definida en [0; 1].

Resolución:

La función se puede escribir como: $f(x) = \dfrac{1}{rx^2 - 2rx + 1}$

Sumamos y restamos r en el denominador de la función.

$f(x) = \dfrac{1}{\underbrace{rx^2 - 2rx + r}_{tcp} - r + 1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{r(x - 1)^2 + 1 - r}$

Partimos del intervalo condición para darle forma a la función solicitada:

Para r > 0 (F definida en [0; 1])

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (x - 1)^2 \leq 1$

Como r > 0 (positivo); multiplicamos a la desigualdad por r; y el sentido no cambia: $0 \leq r(x - 1)^2 \leq r$

Sumamos 1 – r a la desigualdad: $1 - r \leq r(x - 1)^2 + 1 - r \leq 1$

Por propiedad:

Si a y b tienen el mismo signo, se cumple:

$a < x < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$

$1 \leq \dfrac{1}{r(x - 1)^2 + 1 - r} \leq \dfrac{1}{1 - r} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1 - r}$

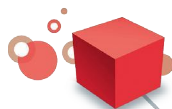
El intervalo obtenido no está en el conjunto de llegada. Para r < 0

Haciendo las respectivas transformaciones: $\dfrac{1}{1 - r} \leq f(x) \leq 1$

Entonces: $0 \leq \dfrac{1}{1 - r} \leq 1$

$1 - r \geq 1$

$r \leq 0 \Rightarrow r \in \langle -\infty; 0]$



UNIDAD 4

VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN

El valor absoluto de un número real **x** se denota por |x| y se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x;\ x \geq 0 \\ -x;\ x < 0 \end{cases} \quad \text{o también:} \quad |x| = \begin{cases} x;\ x > 0 \\ 0;\ x = 0 \\ -x;\ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

1. $|2x-1|+5 = \begin{cases} 2x-1+5;\ 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1)+5;\ 2x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow |2x-1|+5 = \begin{cases} 2x+4;\ x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+6;\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

2. $|3x-2|+10-(2x^2-5) = \begin{cases} 3x-2+10-2x^2+5;\ 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2)+10-2x^2+5;\ 3x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x^2+3x+13;\ x \geq \frac{2}{3} \\ -2x^2-3x+17;\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$

Recuerda

Propiedades de valor absoluto

1. $|x| \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|xy| = |x||y|;\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};\ y \neq 0$
5. $|x^2| = |x|^2 = x^2;\ \forall x \in \mathbb{R}$
6. $\sqrt{x^2} = |x|;\ \forall x \in \mathbb{R}$
7. $-|x| \leq x \leq |x|;\ \forall x \in \mathbb{R}$
8. $|x| = |-x|;\ \forall x \in \mathbb{R}$
9. $|x+y| \leq |x|+|y|;\ \forall x;\ y \in \mathbb{R}$

(Desigualdad triangular)

ECUACIONES QUE INCLUYEN VALOR ABSOLUTO

Sean **x** y **a** expresiones algebraicas, se cumplen los siguientes teoremas:

I. $|x| = a \iff (a \geq 0) \wedge (x = a \vee x = -a)$

II. $|x| = |b| \iff x = b \vee x = -b$

Ejemplos:

1. Resuelve la siguiente ecuación con valor absoluto:
   $|3x-7| = 2x+12$

   Resolución:
   $|3x-7| = 2x+12$
   Aplicamos el teorema I:
   $(2x+12 \geq 0) \wedge (3x-7 = 2x+12 \vee 3x-7 = -2x-12)$
   $(x \geq -6) \wedge \quad (x = 19 \quad \vee \quad x = -1)$
   No descartamos ninguna solución porque satisfacen la condición $x \geq -6 \Rightarrow CS = \{-1; 19\}$

2. Resuelve la siguiente ecuación con valor absoluto:
   $|7x-8| = |5x+2|$

   Resolución:
   $|7x-8| = |5x+2|$
   Aplicamos el teorema II:
   $7x-8 = 5x+2 \ \vee \ 7x-8 = -5x-2$
   $x = 5 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$

   El conjunto solución será: $CS = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$



Observación

Considera también lo siguiente:

a) $|x+y| = |x|+|y|$; si: $xy \geq 0$
b) $|x+y| < |x|+|y|$; si: $xy < 0$

INECUACIONES QUE INCLUYEN VALORES ABSOLUTOS

- Siendo **x** y **b** expresiones algebraicas, considera los siguientes teoremas:

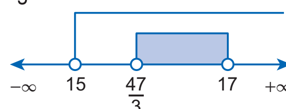
I. $|x| < b \iff (b > 0) \vee (-b < x < b)$

II. $|x| \leq b \iff (b > 0) \vee (-b \leq x \leq b)$

Ejemplo:
Resuelve la siguiente desigualdad: $|2x-32| < x-15$

Resolución:
La inecuación tiene la forma del teorema II:
$|5x-32| < x-15$
Entonces aplicamos el teorema:
$(x-15 > 0) \wedge (-(x-15) < 2x-32 < x-15)$
$(x > 15) \wedge (2x-32 > -x+15 \ \wedge \ 2x-32 < (x-15)$
$(x > 15) \wedge \left(x > \frac{47}{3} \ \wedge \ x < 17\right)$

No descartamos ninguna solución porque satisfacen la condición: $x > 15$
Veamos gráficamente:



Luego, el conjunto solución es:
$CS = \left\langle \frac{47}{3}; 17 \right\rangle$.

Nota

La desigualdad $|x| < b$ según el teorema se puede escribir también como:

$x > -b \ \wedge \ x < b$

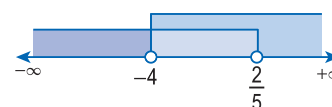
- Siendo **b** un número real, considera los siguientes teoremas:

III. $|x| > b \iff x < -b \lor x > b$ IV. $|x| \geq b \iff x \leq -b \lor x \geq b$

Ejemplo:
Resuelve la inecuación que contiene valor absoluto: $|3x + 1| > 2x - 3$

Resolución:
La inecuación tiene forma del teorema III:
$|3x + 1| > 2x - 3$
Entonces aplicamos el teorema:
$3x + 1 < -(2x - 3) \lor 3x + 1 > 2x - 3$
$x < \frac{2}{5} \lor x > -4$

Veamos gráficamente:



El conjunto solución es: $CS = \mathbb{R} - \left\{-4; \frac{2}{5}\right\}$.

Atención

El método de los puntos críticos sirve para resolver ecuaciones e inecuaciones con dos o más valores absolutos.



INECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS

Método de los intervalos (puntos críticos)

Observa el procedimiento utilizado en la siguiente resolución:

Ejemplo:

1. Resuelve: $|3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2; \forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

a) Obtenemos los puntos críticos, igualando a cero cada valor absoluto:
- $|3x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1/3$
- $|2x - 3| = 0 \Rightarrow x = 3/2$
- $|x + 5| = 0 \Rightarrow x = -5$

b) Graficamos los puntos críticos en la recta real. La recta se ha dividido en 4 intervalos:

$-\infty$ (1) -5 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $+\infty$

	(1)	(2)	(3)	(4)
3x − 1	−	−	+	+
2x − 3	−	−	−	+
x + 5	−	+	+	+

c) Analizamos en cada uno de los intervalos, la variación de los valores absolutos:

Intervalo (1): $x < -5$ ...(1)

$\underbrace{|3x - 1|}_{-} + \underbrace{|2x - 3|}_{-} - \underbrace{|x + 5|}_{-} < 2$

$-(3x - 1) - (2x - 3) - (-(x + 5)) < 2$

$x > \frac{7}{4}$ ...(2)

(1) ∩ (2): $x \in \varnothing \Rightarrow x \in S_1 = \varnothing$

Intervalo (2): $-5 \leq x < \frac{1}{3}$ ...(3)

$\underbrace{|3x - 1|}_{-} + \underbrace{|2x - 3|}_{-} - \underbrace{|x + 5|}_{+} < 2$

$-(3x - 1) - (2x - 3) - (x + 5) < 2$

$x > -\frac{1}{2}$ ...(4)

(3) ∩ (4): $x \in S_2 = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$

Intervalo (3): $\frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ ...(5)

$\underbrace{|3x - 1|}_{+} + \underbrace{|2x - 3|}_{-} - \underbrace{(x + 5)}_{+} < 2$

$3x - 1 - (2x - 3) - x - 5 < 2$

$-3 < 2 \text{ (V)} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ ..(6)

(5) ∩ (6): $x \in S_3 = \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\rangle$

Intervalo (4): $x \geq \frac{3}{2}$ ...(7)

$3x - 1 + \underbrace{|2x - 3|}_{+} - \underbrace{|x + 5|}_{+} < 2$

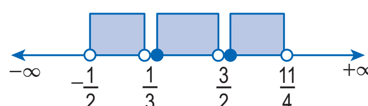
$3x - 1 + 2x - 3 - x - 5 < 2$

$x < \frac{11}{4}$ ...(8)

(7) ∩ (8): $x \in S_4 = \left[\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right\rangle$

El conjunto solución es: $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

Veamos gráficamente:



$\Rightarrow x \in CS = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{11}{4} \right\rangle$

Nota

Para cada intervalo de la recta real:

(1) $x < -5$

$\underbrace{3x - 1 < -16}_{(-)}; \underbrace{2x - 3 < -13}_{(-)}; \underbrace{x + 5 < 0}_{(-)}$

(2) $-5 \leq x < \frac{1}{3}$

$-16 \leq \underbrace{3x - 1}_{(-)} < 0; -13 \leq \underbrace{2x - 3}_{(-)} < -\frac{7}{3}$

$0 \leq \underbrace{x + 5}_{(+)} < \frac{16}{3}$

(3) $\frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{2}$

$0 \leq \underbrace{3x - 1}_{(+)} < \frac{7}{2}; -\frac{7}{3} \leq \underbrace{2x - 3}_{(-)} < 0$

$\frac{16}{3} \leq \underbrace{x + 5}_{(+)} < \frac{13}{2}$

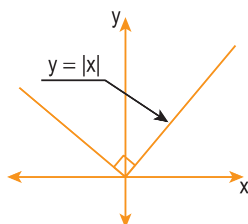
(4) $x \geq \frac{3}{2}$

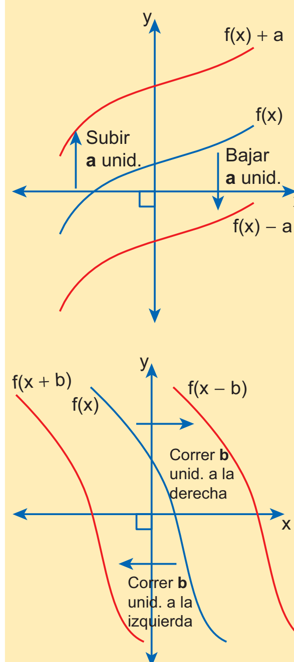
$\underbrace{3x - 1 \geq 0}_{(+)}; \underbrace{2x - 3 \geq 0}_{(+)}; \underbrace{x + 5 \geq 0}_{(+)}$



Técnicas para graficar

En forma resumida se presentan los siguientes procedimientos para graficar funciones.

Traslación vertical	Para graficar **y** considera:
1. $y = f(x) + a ; a > 0$ 2. $y = f(x) - a ; a > 0$	Subir **a** unidades la gráfica de **f**. Bajar **a** unidades la gráfica de **f**.
Traslación horizontal	**Para graficar y considera:**
3. $y = f(x + b);\ b > 0$ 4. $y = f(x - b);\ b > 0$	Correr la gráfica de **f**, **b** unidades a la izquierda Correr la gráfica de **f**, **b** unidades a la derecha.
5. 	Para los valores **x** tales que **x** es negativo el VALOR ABSOLUTO lo hace positivo.





Ejemplo:

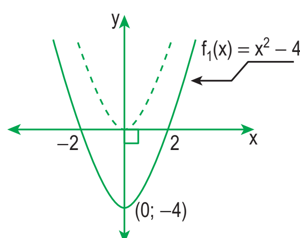
Indica la gráfica que mejor representa a: $f(x) = ||x^2 - 4| - 3| ; x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Consideramos las técnicas para graficar, esta la realizamos por partes:

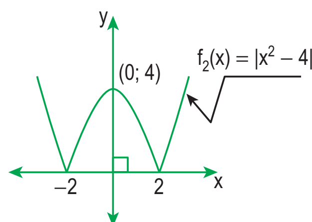
1. $f_1(x) = x^2 - 4$

   En este caso la traslación es 4 unidades hacia abajo.



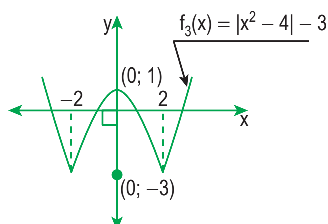
2. $f_2(x) = |x^2 - 4|$

   El valor absoluto hace que los valores x negativos de **x** los convierta en positivos.



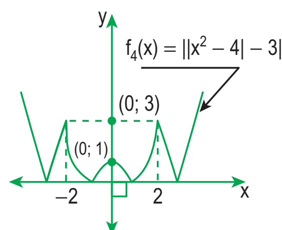
3. $f_3(x) = |x^2 - 4| - 3$

   Un nuevo gráfico que se tiene que trasladar 3 unidades hacia abajo.



4. $f_4(x) = ||x^2 - 4| - 3|$

   Convertimos los valores **x** negativos a absolutos referente al gráfico.



EFECTUAR

1. Determina el conjunto solución de la inecuación:
   $|x - 3| + (x - 1) + |2x - 1| < x - 5$
2. Señala cuántos soluciones tiene la ecuación:
   $x + \dfrac{2003}{|x|} = |x| + \dfrac{2003}{x}$
3. Halla la suma de valores enteros que verifica:
   $4|x - 2| + 3\,|-x| = 2|x| + |8 - 4x| + 9$

Problemas resueltos

1 Sean los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x|^2 + |x|\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} / |x|^2 + |x| < \frac{15}{4}\}$

Halla $A \cap B$.

Resolución:

Del conjunto A tenemos:

$|x|^2 + |x| - 2 > 0$

$\underbrace{(|x| + 2)}_{\text{Siempre es positivo}} (|x| - 1) > 0 \Rightarrow |x| - 1 > 0$

Luego: $|x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \;\vee\; x < -1$

$\Rightarrow A =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Análogamente se obtiene: $B =]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$

$\therefore\; A \cap B =]-\frac{3}{2}; -1[\cup]1; \frac{3}{2}[$

2 Resuelve: $|x^2 - 5x| < 6$

Resolución:

$|x^2 - 5x| < 6$

Por el teorema: $-6 < x^2 - 5x < 6$

Entonces:

$-6 < x^2 - 5x$ ...(I)

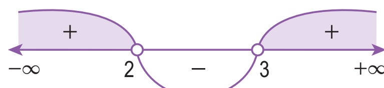
$x^2 - 5x < 6$ ...(II)

De (I):

$-6 < x^2 - 5x$

$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) > 0$

Graficamos:



Como la inecuación es mayor que cero tomaremos las zonas positivas:

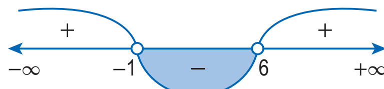
$x \in \langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ ...(α)

De (II):

$x^2 - 5x < 6$

$x^2 - 5x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) < 0$

Graficamos:



Como la inecuación es menor que cero tomaremos la zona negativa: $x \in \langle -1; 6\rangle$ ...(β)

Luego intersectando (α) y (β) obtenemos:

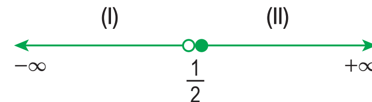
$CS = \langle -1; 2\rangle \cup \langle 3; 6\rangle$

3 Resuelve: $\dfrac{|2x - 1| - x}{x - 5} < 2$

Resolución:

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$

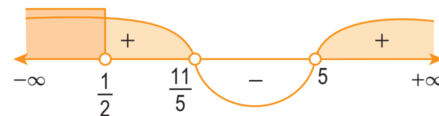
Graficamos:



Intervalo (I): $\langle -\infty; 1/2\rangle$ ...(1)

$\dfrac{1 - 2x - x}{x - 5} - 2 < 0$

$\dfrac{-5x + 11}{x - 5} < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{5x - 11}{x - 5} > 0$



$x \in \langle -\infty; \frac{11}{5}\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$ ...(2)

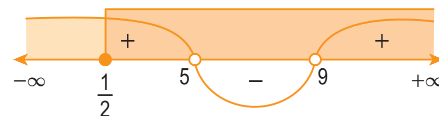
(1) $\cap$ (2):

$x \in \langle -\infty; 1/2\rangle$ ...(*)

Intervalo (II): $[1/2; +\infty\rangle$ ...(3)

$\dfrac{2x - 1 - x}{x - 5} - 2 < 0$

$\dfrac{9 - x}{x - 5} < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x - 9}{x - 5} > 0$



$x \in \langle -\infty; 5\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$ ...(4)

(3) $\cap$ (4):

$x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$ ...(**)

Luego de (*) y (**) obtenemos el intervalo donde pertenece x:

$CS = \langle -\infty; 5\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$

4 Resuelve: $|3 - 2x| \leq |x + 4|$. Da como respuesta el mayor entero que la verifica.

Resolución:

$|3 - 2x| \leq |x + 4| \;\Rightarrow\; |2x - 3| \leq |x + 4|$

Elevando al cuadrado obtenemos:

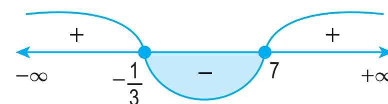
$(2x - 3)^2 \leq (x + 4)^2$

$(2x - 3)^2 - (x + 4)^2 \leq 0$

$(2x - 3 - x - 4)(2x - 3 + x + 4) \leq 0$

$(x - 7)(3x + 1) \leq 0$

Graficamos:



$CS = [-1/3; 7]$

El mayor entero que verifica es el 7.



5 Resuelve: $|3x - 4| \leq x + 4$

Resolución:

Recuerda la siguiente propiedad: $|x| \leq b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge (-b \leq x \leq b)$

En el problema, tenemos:

$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ ...(1)

$$\underbrace{-(x+4) \leq \overbrace{3x - 4}}_{\text{I}}\overbrace{{}\leq x + 4}^{\text{II}}$$

De (I):

$-x - 4 \leq 3x - 4$

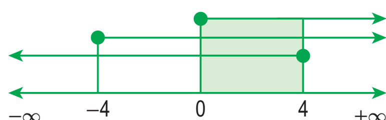
$x \geq 0$ ...(2)

De (II):

$3x - 4 \leq x + 4$

$x \leq 4$ ...(3)

De las soluciones (1); (2) y (3):



CS = [0; 4]

6 Resuelve: $|x| + |1 - x| \leq 1$

Resolución:

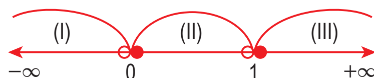
$|x| + |1 - x| \leq 1$

$\Rightarrow$ Sea:

$x = 0 \quad \wedge \quad x - 1 = 0$

$x = 0 \quad \wedge \quad x = 1$

Graficamos:



Intervalo (I): $x < 0$

Analizamos en la inecuación: $-x + 1 - x \leq 1 \Rightarrow x > 0$

Luego:

$x \in \langle -\infty; 0\rangle \cap \langle 0; +\infty\rangle$

$x \in \varnothing$ ...(1)

Intervalo (II): $0 \leq x < 1$

Analizamos en la inecuación: $x + 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Luego:

$x \in [0; 1\rangle \cap \mathbb{R}$

$x \in [0; 1\rangle$ ...(2)

Intervalo (III): $x \geq 1$

Analizamos en la inecuación: $x + x - 1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty; 1]$

Luego: $x \in [1; +\infty\rangle \cap \langle -\infty; 1]$

$x \in \{1\}$ ...(3)

Entonces: (1) ∪ (2) ∪ (3): $x \in [0; 1]$

CS = [0; 1]

7 Resuelve: $\left|\dfrac{2x - 5}{x - 6}\right| < 3$.

Señala el menor entero positivo que la verifica.

Resolución:

$\left|\dfrac{2x - 5}{x - 6}\right| < 3 \Rightarrow |2x - 5| < 3|x - 6|$

Elevamos al cuadrado:

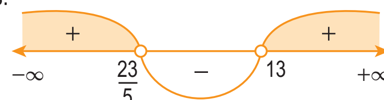
$(2x - 5)^2 - (3x - 18)^2 < 0$

$(2x - 5 - 3x + 18)(2x - 5 + 3x - 18) < 0$

$(-x + 13)(5x - 23) < 0; x \neq 6$

$(x - 13)(5x - 23) > 0; x \neq 6$

Graficamos:



Entonces: $x \in CS = \langle -\infty; 23/5\rangle \cup \langle 13; +\infty\rangle$

∴ El menor entero positivo que lo verifica es 1.

8 Si $\{x_1; x_2\}$ es el conjunto solución de: $3^{|x+1|} - |3^x - 1| = 3^x + 2$, entonces la suma de x_1 y x_2 es:

Resolución:

Obtenemos los puntos críticos:

$|x + 1| = 0 \Rightarrow x = -1$

$|3^x - 1| = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

Graficamos los puntos críticos:

−∞ ① −1 ② 0 ③ +∞

	①	②	③
$x + 1$	−	+	+
$3^x - 1$	−	−	+

Analizamos cada uno de los intervalos:

Intervalo ①: $x < -1$ ...(1)

$3^{\underset{-}{|x+1|}} - \underset{-}{|3^x - 1|} = 3^x + 2$

$3^{-x-1} + 3^x - 1 = 3^x + 2$

$3^{-x-1} = 3$

$\Rightarrow -x - 1 = 1$

$x = -2$ ...(2)

(1) ∩ (2): $S_1 = \{-2\}$

Intervalo ②: $-1 \leq x < 0$ ...(3)

$3^{\underset{+}{|x+1|}} - \underset{-}{|3^x - 1|} = 3^x + 2$

$3^{x+1} + 3^x - 1 = 3^x + 2$

$3^{x+1} = 3^1$

$\Rightarrow x = 0$ ...(4)

(3) ∩ (4): $S_2 = \varnothing$

Intervalo ③: $x \geq 0$ ...(5)

$3^{\underset{-}{|x+1|}} - \underset{-}{|3^x - 1|} = 3^x + 2$

$3^{x+1} - (3^x - 1) = 3^x + 2$

$3^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$ ...(6)

(5) ∩ (6): $S_3 = \{0\}$

$CS = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$CS = \{-2\} \cup \varnothing \cup \{0\}$

$CS = \{-2; 0\}$

Luego:

$x_1 = -2 \wedge x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = -2 + 0 = -2$

LOGARITMOS



Atención

Teorema de la existencia y unicidad de exponentes

Para todo par de números reales a y b, tales que $a > 0$; $a \neq 1$ y $b > 0$; existe un número real y solo un **x**, tal que:

$$a^x = b$$

Nota

Si $a > 0$ y $a \neq 1$; entonces las condiciones $a^{x_1} = a^{x_2}$ y $x_1 = x_2$ son equivalentes, es decir:
$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Recuerda

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES O DE BRIGGS

Es el sistema en el cual la base es el número diez.
Se representa:

$$\log_{10}N <> \log N$$

y se lee:
logaritmo decimal de N.

Partes de un logaritmo decimal
$\log 900 = 2{,}9542425094...$

Donde:
Característica: 2
Mantisa: 0,9542425094...

SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS O NATURALES
Usa como base del sistema el número trascendente **e**, cuyo valor aproximado es:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = 2{,}71828182\ ...$$



DEFINICIÓN

Sean a y b dos números reales, $a > 0$; $a \neq 1$ y $b > 0$; un número real **x** recibe el nombre de logaritmo del número **b** en base **a** si y solo si $a^x = b$.

Notación: $\log_a b = x$; se lee: x es el logaritmo del número **b** en base **a**.

De la definición: $\log_a b = x \iff a^x = b$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

1. Si $A \,.\, B > 0$ y $b > 0, b \neq 1$; se cumple:

$$\log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$$

2. Si $A > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$; se cumple:

$$\log_{b^m} A^n = \frac{n}{m}\log_b A \quad ; n \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. Si $A > 0$; $b > 0$; $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; se cumple:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A$$

4. Si $b > 0 \wedge b \neq 1$; se cumple:

$$\log_b b = 1$$

5. Regla del sombrero:
Si $A > 0$, $b > 0$; $b \neq 1$, se cumple:

$$\log_b A^n = n\log_b A \quad ; n \in \mathbb{R}$$

6. Si $A \,.\, B > 0$, $b > 0$; $b \neq 1$; se cumple:

$$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$$

7. Si $b > 0$ y $b \neq 1$; se cumple:

$$\log_b 1 = 0$$

8. Si $b > 0$, $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $M > 0$; se cumple:

$$\log_b M = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{M}$$

CAMBIO DE BASE

Sea $N > 0$ y $b > 0$; $b \neq 1$; $a > 0$; $a \neq 1$; se cumple: $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

Ejemplos:

- $\log_3 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 3}$
- $\log_7 20 = \dfrac{\log_5 20}{\log_5 7}$
- $\log_{20} 18 = \dfrac{\log_{100} 18}{\log_{100} 20}$

REGLA DE LA CADENA

Si a; b; c; $d \in \mathbb{R}^+$ y a; b; c; $d \neq 1$ se cumple:

Abierta: $\log_b a \,.\, \log_c b \,.\, \log_d c = \log_d a$

Cerrada: $\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d = \log_a d$

COLOGARITMO

Definición

Se denomina cologaritmo de un número **b** positivo en una base dada **a** positiva y diferente de la unidad, como el logaritmo de la inversa de dicho número en esa misma base. Así:

$$\text{colog}_a b = \log_a(1/b) = -\log_a b \quad ; a \wedge b > 0;\ a \neq 1$$

ANTILOGARITMO

Definición

El antilogaritmo de un número real **a** en una base dada **b**, es el número que resulta de elevar la base al número **a**. Así:

$$\text{antilog}_b a = b^a \quad ; a \in \mathbb{R},\ b > 0;\ b \neq 1$$

Propiedades

Siendo $b > 0 \wedge b \neq 1$, se cumple que:

1. $\boxed{\text{antilog}_b(\log_b x) = x}$; $x > 0$
2. $\boxed{\log_b(\text{antilog}_b x) = x}$; $x \in \mathbb{R}$
3. $\boxed{\text{antilog}_b(\text{colog}_b x) = \frac{1}{x}}$; $x > 0$
4. $\boxed{\text{colog}_b(\text{antilog}_b x) = -x}$; $x \in \mathbb{R}$

Observación

$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$; $a; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$



DESIGUALDADES LOGARÍTMICAS

Es una relación de orden donde la variable se encuentra afectada por la función logaritmo, y su resolución depende fundamentalmente de la base de dicha función.
Se presentan los siguientes casos:

Caso 1: cuando a > 1

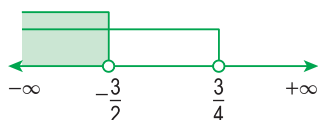
$$\log_a f(x) > b \iff f(x) > 0 \wedge f(x) > a^b$$

Ejemplo:
Resuelve: $\log_3(3 - 4x) > 2$

Resolución:

- Por la propiedad enunciada:
  $3 - 4x > 0 \wedge 3 - 4x > 3^2$

$$x < \frac{3}{4} \quad \wedge \quad x < -\frac{3}{2}$$



$CS = x \in \left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle$

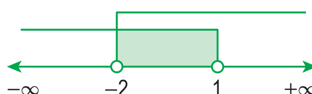
Caso 2: cuando a > 1

$$\log_a f(x) < b \iff f(x) > 0 \wedge f(x) < a^b$$

Ejemplo:
Resuelve: $\log_6(x - 3(x + 1) + 5) < 1$

Resolución:

- Por la propiedad enunciada:
  $x - 3(x + 1) + 5 > 0 \wedge x - 3(x + 1) + 5 < 6^1$
  $x < 1 \wedge x > -2$



$CS = x \in \langle -2; 1 \rangle$

Atención

La inecuación logarítmica también se puede expresar como:

$\boxed{\log_a M > \log_a N}$

Donde:

$\boxed{M > 0, N > 0, a > 0, a \neq 1}$ ...I

Según como se presenta la base considere los casos:

Caso 1:

$\boxed{\text{Si: } a > 1 \wedge \log_a M > \log_a N \Rightarrow M > N}$ ...II

Caso 2:

$\boxed{\text{Si: } 0 < a < 1 \wedge \log_a M > \log_a N \Rightarrow M < N}$ ...III

El conjunto solución viene dado por la operación:

$\boxed{CS = CS(I) \cap CS(II) \cap CS(III)}$



GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

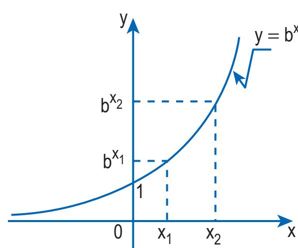
Función exponencial

Sea el número real **b**, tal que $b > 0 \wedge b \neq 1$, entonces definimos la función exponencial de la siguiente manera:

$$\exp_b = \{(x; y) / x \in \mathbb{R} \wedge y = b^x\}$$

Veamos dos casos:

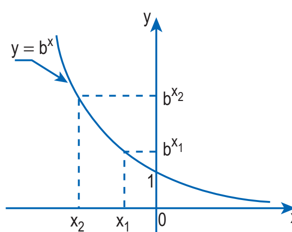
A) Base: $b > 1$



$\boxed{\text{Si: } x_2 > x_1 \Rightarrow b^{x_2} > b^{x_1}}$

∴ La función es estrictamente creciente.

B) Base: $0 < b < 1$



$\boxed{\text{Si: } x_2 < x_1 \Rightarrow b^{x_2} > b^{x_1}}$

∴ La función es estrictamente decreciente.

Función logaritmo

La función logaritmo se define como el conjunto de pares ordenados:

$$f = \{(x; y) / f(x) = x > 0 \wedge y = \log_b x \in \mathbb{R}\}, b \neq 1$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \wedge \text{Ran}(f) = \mathbb{R}$



Recuerda

- **Identidad fundamental del logaritmo**

  Siendo: $a \wedge b > 0$; $a \neq 1$

  $$a^{\log_a b} = b$$

- **Regla del intercambio**

  Sea: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$; $b \neq 1$

  Se cumple:

  $$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

  Así:

- $7^{\log_5 10} = 10^{\log_5 7}$
- $2^{\log_5 9} = 9^{\log_5 2}$

Atención

Reconocer que la función f(x) gobierna en todo el conjunto admisible de:

$$x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$$

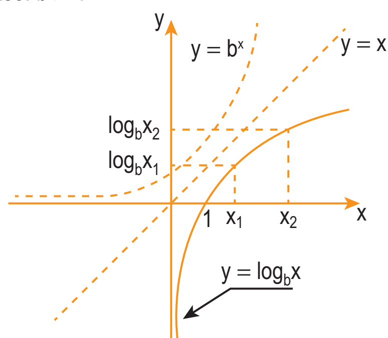


Nota

Como la función es par, se analiza por el criterio más simple en el intervalo $\langle 1; +\infty\rangle$ de modo que para el intervalo $\langle -\infty; -1\rangle$ se hace su respectiva imagen reflexiva respecto al eje y.

Veamos dos casos:

A) Base: $b > 1$

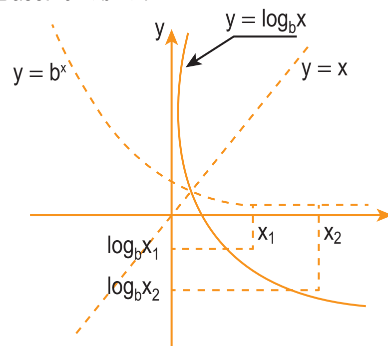


Del gráfico:

$$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Longleftrightarrow x_2 > x_1$$

$\therefore$ Es una función creciente.

B) Base: $0 < b < 1$



Del gráfico:

$$\log_b x_1 > \log_b x_2 \Longleftrightarrow x_1 < x_2$$

$\therefore$ Es una función decreciente.

Ejemplos:

1. Bosqueja la gráfica cartesiana de la función: $f(x) = |\log_b|x||$; si $b > 1$.

Resolución:

$\log_b|x| \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |x| > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Como $b > 1$, nos queda por definir lo siguiente:

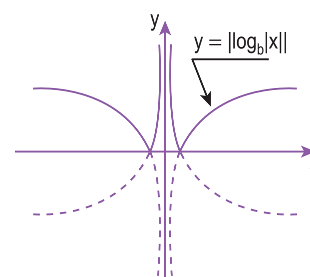
La función es continua para cualquier valor de x menos el cero (no lo considera). Luego, la función f(x) es creciente por encima del eje x.

$\log_b|x| \in \mathbb{R} \Rightarrow |\log_b|x|| \geq 0$

Además, la función es par. Para cualquier valor negativo de x, la función se hace positiva (su gráfica cartesiana es simétrica con respecto al eje y).

$$f(-x) = |\log_b|-x|| = |\log_b|x|| = f(x)$$

Luego, la gráfica solicitada es como sigue:



2. Bosqueja la gráfica cartesiana de la función: $f(x) = \log(|x| + 1) + \log(|x| - 1)$

Resolución:

Para que la función exista, se debe tener:

$|x| - 1 > 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1$

$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

Observa que la función es par, es decir:

$f(x) = f(-x)$; $\forall x$: $(-x) \in \text{Dom}(f)$

Veamos: $f(x) = \log(|x| + 1) + \log(|x| - 1)$

$f(-x) = \log(|-x| + 1) + \log(|-x| - 1)$

$\Rightarrow f(x) = f(-x)$

Consideramos el conjunto admisible de $x \in \langle 1; +\infty\rangle$ entonces:

$f(x) = \log(x + 1) + \log(x - 1)$

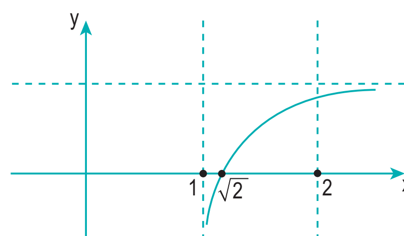
$= \log((x + 1)(x - 1))$

$= \log(x^2 - 1)$

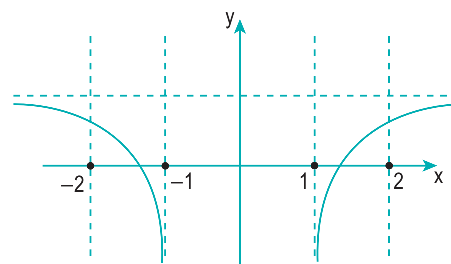
Ahora: $x^2 - 1 \neq 0$; $x \neq 1$, entonces $x = 1$ es una asíntota vertical para f.

También notamos que $f(\sqrt{2}) = 0$ y $f(2) < 1$

Entonces la gráfica que corresponde a $\langle 1; +\infty\rangle$ es:



Finalmente, como f(x) es par, su gráfica está dada por:



Problemas resueltos

1 Calcula: $A = \log_3 \text{antilog}_3 \log_3 \text{antilog}_3 \log_3 3\sqrt{3}$

Resolución:

Recordamos $\text{antilog}_b \log_b N = N$

Entonces:

$A = \log_3 \text{antilog}_3 \underbrace{\log_3 \underbrace{\text{antilog}_3 \log_3 3\sqrt{3}}_{3\sqrt{3}}}_{3\sqrt{3}}$

$A = \log_3 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow A = \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3}$

$= 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ A = \dfrac{3}{2}$

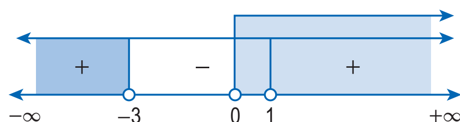
2 Halla el conjunto solución de: $\log_x\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) > 1$

Resolución:

- Existencia del logaritmo:

$\dfrac{x+3}{x-1} > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$

$(x+3)(x-1) > 0$



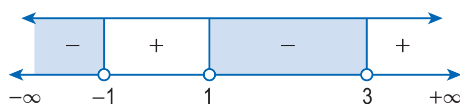
$\therefore\ x \in \langle 1; +\infty\rangle$ ...A

- La base es mayor que uno:

$\log_x\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) > \log_x x \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1} > x$

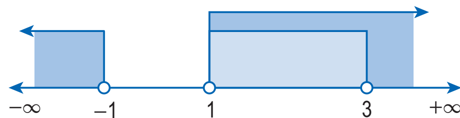
$\dfrac{x+3}{x-1} - x > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{x-1} < 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)(x-1) < 0$



$x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$ ...B

Intersecamos los conjuntos A y B:



$\therefore\ x \in \langle 1; 3\rangle$

3 Halla el conjunto solución de: $\log_5 x + \log_5(x+1) < \log_5(2x+6)$

Resolución:

Para desarrollar inecuaciones logarítmicas como esta, seguimos los pasos descritos en la teoría.

Existencia del logaritmo.

$x > 0 \ \wedge\ x + 1 > 0 \ \wedge\ 2x + 6 > 0$

$x > 0 \ \wedge \quad x > -1 \wedge \quad x > -3$

$\Rightarrow x > 0$ ...A

De la inecuación:

$\log_5[x(x+1)] < \log_5(2x+6)$

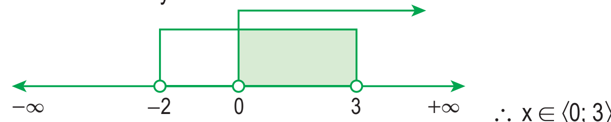
La base es mayor que 1, entonces:

$x(x+1) < 2x + 6$

$x^2 + x < 2x + 6$

$x^2 - x - 6 < 0$

$(x-3)(x+2) < 0$



$x \in \langle -2; 3\rangle$ ...B

Intersecamos A y B:

$\therefore\ x \in \langle 0; 3\rangle$

4 Calcula: $R = 1 - \text{colog}_2 \text{antilog}_4 \log_5 625$

Resolución:

$R = 1 - \text{colog}_2 \text{antilog}_4 \log_5 625$

$R = 1 - \text{colog}_2 \text{antilog}_4 \log_5 5^4$

$R = 1 - \text{colog}_2 \text{antilog}_4 4$

$R = 1 - \text{colog}_2 4^4 = 1 - \text{colog}_2 2^8$

$R = 1 - \log_2\left(\dfrac{1}{2^8}\right) = 1 - \log_2 2^{-8}$

$R = 1 + 8\log_2 2 \qquad \therefore\ R = 9$

5 Resuelve: $\log_2^2 x - 6|\log_2 x| - 16 \geq 0$

Resolución:

De la inecuación:

$\log_2^2 x - 6|\log_2 x| - 16 \geq 0$

$|\log_2 x|^2 - 6|\log_2 x| - 16 \geq 0$

$|\log_2 x| \qquad -8$

$|\log_2 x| \qquad 2$

$\underbrace{(|\log_2 x| - 8)(|\log_2 x| + 2)}_{+} \geq 0$

$\Rightarrow |\log_2 x| - 8 \geq 0$

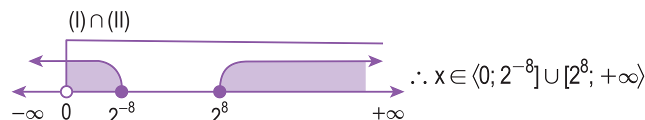
$|\log_2 x| \geq 8$

$\Rightarrow \log_2 x \geq 8 \ \vee\ \log_2 x \leq -8$

$x \geq 2^8 \qquad x \leq 2^{-8}$ ...(I)

Además:

$x > 0$ ...(II)



$\therefore\ x \in \langle 0; 2^{-8}] \cup [2^8; +\infty\rangle$

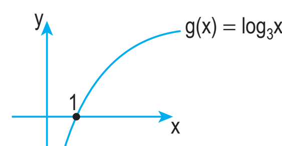
6 Grafica: $f(x) = \log_3 x^2$

Resolución:

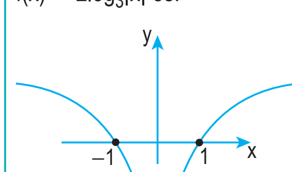
De la función:

$f(x) = \log_3 x^2 = 2\log_3|x|$

Sabemos que:



Luego, la gráfica de $f(x) = 2\log_3|x|$ es:



FUNCIONES

Nota

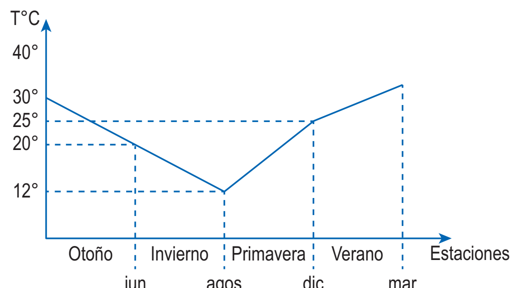
De la gráfica:

En qué mes observas la temperaturas más baja

Rpta.: En agosto (invierno) 12°C.

NOCIÓN DE FUNCIÓN

El clima en nuestro país es cambiante y se relaciona con la temperatura, es decir, a medida que pasan los días la temperatura aumenta o disminuye, es por ello que se observan 4 estaciones en el año.
Veamos cómo relacionar **estaciones** con **temperatura**.



Se observa según la gráfica:
En junio: $T = 20°$ C
En agosto: $T = 12°$ C
En diciembre: $T = 25°$ C
La temperatura adquiere su máximo valor en verano (25° – 31° aprox.).



FUNCIÓN

Definición

Una función es una dependencia entre magnitudes.
Sean A y B dos conjuntos no vacíos (pudiendo ser $A = B$), llamaremos función definida en A a valores en B (función de A en B), a toda relación: $f \subset A \times B$ que tiene la propiedad:

$$(a; b) \in f \text{ y } (a; c) \in f \Rightarrow b = c$$

Es decir, una función f es un conjunto de pares ordenados de elementos, tal que dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.

Recuerda

El producto cartesiano de $M = \{1; 2\}$ y $N = \{3; 4; 5\}$ es:
$M \times N = \{(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$

Pares ordenados

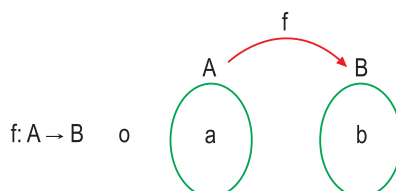
Relación:
Es un subconjunto de $M \times N$, es decir, una relación es un conjunto de pares ordenados.

$$R \subset M \times N$$

Notación

Si f es una función de A en B, se designa por:

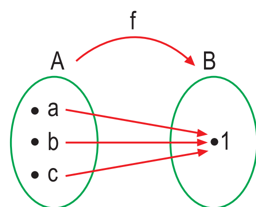
$f: A \rightarrow B$ o



Se lee: f es una función de A en B.
a: elemento de A.
b: elemento de B.

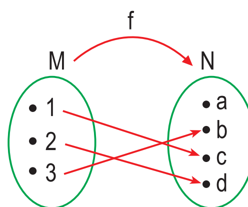
Ejemplos:

1.



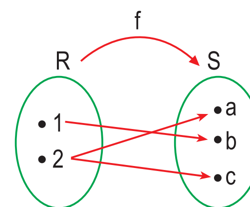
Siendo: $a \neq b \neq c$, diremos: $f = \{(a; 1), (b; 1), (c; 1)\}$ es función.

2.



$f = \{(1; c), (2; d), (3; b)\}$ es función.

3.



$f = \{(1; b), (2; a), (2; c)\}$
No es función porque se repite la primera componente, f es una relación.

Observación

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.



4. Determina los valores de a y b, de modo que el siguiente conjunto:

   $F = \{(2; 5), (-1; 4), (2; 2a^2 - b), (-1; b - a^2)\}$

   sea una función.

   Resolución:
   Si F es función, por definición al repetirse las primeras componentes las segundas deben ser iguales:

   $2a^2 - b = 5$ ...(1)
   $b - a^2 = 4$ ...(2)
   sumando (1) y (2)
   $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \vee a = -3$

   En (2):
   $b - 9 = 4 \Rightarrow b = 13$
   $\therefore\ a = \pm 3 \wedge b = 13$



Dominio y rango de una función

Si f es una función de A en B, el conjunto A se llamará conjunto de partida o dominio de la función, y B el conjunto de llegada o rango.

- **El dominio de una función f.** Se designa por Dom(f) o Df y se define como el conjunto siguiente:

  $Dom(f) = \{x \in A \,/\, \exists\, y, \text{ tal que } (x; y) \in f\}$ (son las primeras componentes de los pares ordenados)

- **El rango (o imagen) de una función f.** Se designa por Ran(f) o Im(f) y se define como el conjunto siguiente:

  $Ran(f) = \{y \in B \,/\, \exists\, x, \text{ tal que } (x; y) \in f\}$ (son las segundas componentes de los pares ordenados)

- Si el par ordenado $(a; b) \in f$, escribiremos:
  $b = f(a)$ y diremos que b es imagen de **a** en **f** (o también, que b es el valor de **f** en **a**)
  $f = \{(a; b) \in A \times B \,/\, b = f(a),\ a \in Dom(f)\}$

  Ejemplo:
  Halla el dominio y rango de la función $f = \{(2; 3), (4; 5), (6; 3), (-2; a)\}$

  Resolución:
  $Dom(f) = \{2; 4; 6; -2\} \wedge Ran(f) = \{3; 5; a\}$

Atención

Para definir bien una función, es suficiente conocer su dominio (Dom(f)) y una regla que permita asignar para cualquier $x \in Dom(f)$, su imagen f(x).

Ejemplo:
$\underbrace{f(x) = 3x - 1}_{\text{Regla de correspondencia}}\ \forall\ \underbrace{x \in [0; 5]}_{\text{Dominio}}$

$\Rightarrow$ f(x) es una función.



Regla de correspondencia

Es la expresión matemática que relaciona cada elemento de la función con su respectivo rango o imagen.

$y = f(x)$

Donde:
x: variable independiente.
y: variable dependiente.

También:
$f(x) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{y = f(x)}_{\text{Regla de correspondencia}},\ \forall\ x \in Dom(f)\}$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Son aquellas funciones $y = f(x)$, cuyos dominios y rangos se encuentran en los reales.

$$Dom(f) \in \mathbb{R} \wedge Ran(f) \in \mathbb{R}$$

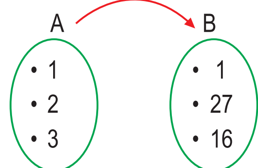
Dominio de una función real

Ejemplos:
Halla el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

   Resolución:
   Como $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
   $\therefore Domf(x) = [2; +\infty\rangle$

2. $f = \{(x; y) \in A \times B \,/\, y = x^3\}$



Resolución:
$x \in A$, veamos las imágenes que cumplan con la regla de correspondencia: $y = x^3$

$(1; 1) \in A \times B$ $(3; 27) \in A \times B$
x y = x^3 x y = x^3

(1; 1) y (3; 27) cumplen las condiciones.

$\Rightarrow f = \{(1; 1), (3; 27)\}$

$\therefore Dom(f) = \{1; 3\}$

Observación

En el ejemplo 2
$(2; 27) \in A \times B$ pero no a f; ya que no cumple la regla de correspondencia:
$y = x^3$
$(2; 27) \neq (2; 2^3)$
x y



Rango de una función real

Para determinar el rango existen varios métodos, los más conocidos son:

- Cuando tenemos una función donde su dominio no presenta rango, se despeja x en función de y.
- Cuando tenemos un intervalo como dominio, usamos desigualdades.

Ejemplos:

1. Para la función definida por: $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$, halla el rango.

Resolución:

$g(x) = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$y = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + (2 - y) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(2 - y)}}{2(2)}$$

Como $x \in \mathbb{R}$; luego, también $y \in \mathbb{R}$.

Pero: $\Delta \geq 0 \Rightarrow 9 - 8(2 - y) \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{7}{8}$

Luego: $\text{Ran}(g) = \left[\frac{7}{8}; +\infty\right\rangle$

2. Halla el rango de la función: $f(x) = 2x + 5; x \in \langle -4; 2]$

Resolución:

Del dominio formamos f(x):

$-4 < x \leq 2$

$-8 < 2x \leq 4$

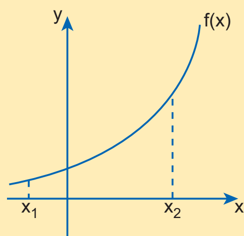
$-3 < 2x + 5 \leq 9$

$-3 < f(x) \leq 9$

Luego; $\text{Ran}(f) = \langle -3; 9]$

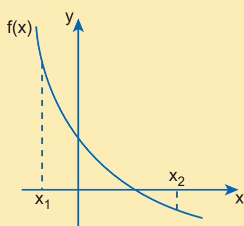
Atención

Función creciente



Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Función decreciente



Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

En ambos casos.
Si $\text{Domf}(x) \in [x_1; x_2]$
$\Rightarrow \text{Ranf}(x) \in [f(x_1); f(x_2)]$

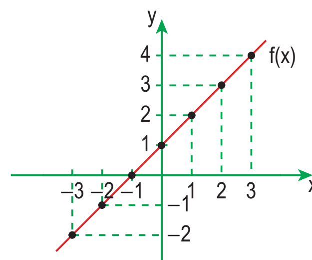


GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Es la representación esquemática de los pares ordenados en el plano cartesiano.

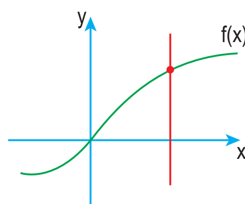
Ejemplo:
Grafica $f(x) = x + 1$
Primero tabulamos para luego graficar:

x	f(x) = x + 1
–3	–2
–2	–1
–1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
⋮	⋮

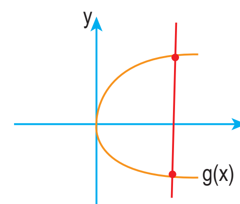


Reconocimiento gráfico de una función

Una gráfica cualquiera será función; si y solo si, al trazar una recta paralela al eje y, corta a la gráfica en un solo punto.



f(x) es una función.



g(x) no es una función.

Recuerda

En una función:
$F(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$

F(1): significa que a la función f(x) se evalúa en 1.

$\Rightarrow F(1) = a + b$



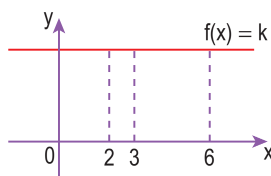
FUNCIONES ESPECIALES

1. Función constante

Regla de correspondencia $f(x) = k$ o $y = k$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \wedge \text{Ran}(f) = k$

Gráfica:

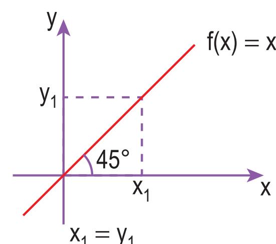


2. Función identidad

Regla de correspondencia: $f(x) = x$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \wedge \text{Ran}(f) = \mathbb{R}$

Gráfica:





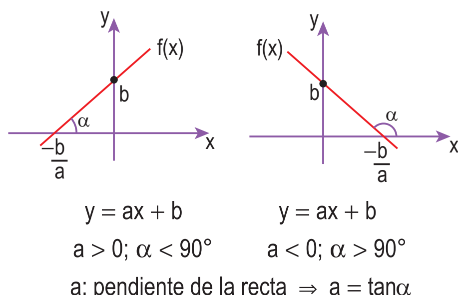
3. Función lineal

Es una función polinomial con dominio en todos los reales y con regla de correspondencia:

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son constantes cualesquiera, ($a \neq 0$).
Su gráfica es una recta; con pendiente **a** e intercepto **b**.

Para graficarla, se determina los interceptos con los ejes haciendo $x = 0$ y $f(x) = 0$. En $f(x) = ax + b$:
Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = b$
Si $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$



$y = ax + b$ $y = ax + b$
$a > 0;\ \alpha < 90°$ $a < 0;\ \alpha > 90°$
a: pendiente de la recta $\Rightarrow a = \tan\alpha$

4. Función valor absoluto

Regla de correspondencia:

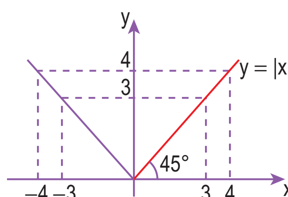
$$f(x) = |x| \quad \text{o} \quad y = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x; \text{ si: } x \geq 0 \\ -x; \text{ si: } x < 0 \end{cases}$$

$Dom(f) = \mathbb{R} \wedge Ran(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Gráfica:
Tabulamos

x	f(x) = |x|
−4	4
−3	3
−2	2
−1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮



Nota

Recuerda:
- $|a| = a \iff a \geq 0$
  $|a| = -a \iff a < 0$

  Ejemplos:
  $|-5| = -(-5) = 5$
  $|3| = 3$
- Si: $|a| \geq m,\ m \in \mathbb{R}^+$
  $\Rightarrow a \geq m \vee a \leq -m$
- Si: $|a| \leq m\ ;\ m \in \mathbb{R}^+$
  $\Rightarrow -m \leq a \leq m$

  Ejemplos:
- $|a| \geq 2 \Rightarrow a \geq 2 \vee a \leq -2$
  $|a| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$



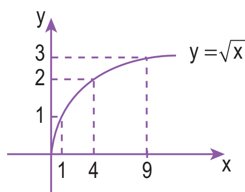
5. Función raíz cuadrada

Regla de correspondencia: $f(x) = \sqrt{x}$ o $y = \sqrt{x}$

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \wedge Ran(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Gráfica:
Se tabulan valores positivos de x:

x	0	1	4	9
f(x)	0	1	2	3



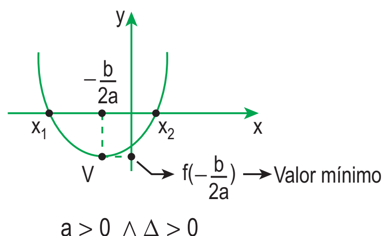
6. Función cuadrática

Es una función polinomial con dominio en el conjunto de los números reales y cuya regla de correspondencia es:

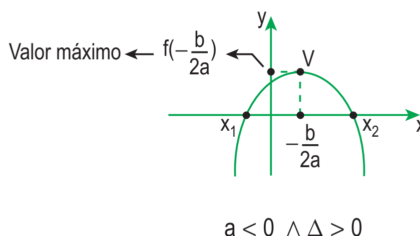
$$f(x) = ax^2 + bx + c \ ;\ a;\ b;\ c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Su gráfica es una parábola simétrica respecto a una recta vertical, llamada eje de simetría, abierta hacia arriba si: $a > 0$ y hacia abajo si: $a < 0$.

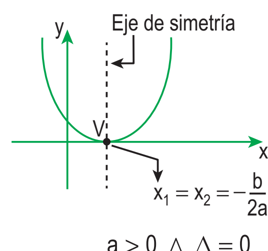
Gráfica:
Sea la función: $y = ax^2 + bx + c$; donde Δ (discriminante) $= b^2 - 4ac \ \wedge$ V: vértice



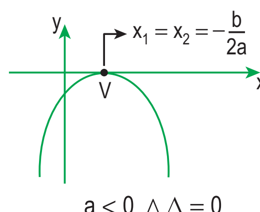
$a > 0 \wedge \Delta > 0$



$a < 0 \wedge \Delta > 0$



$a > 0 \wedge \Delta = 0$

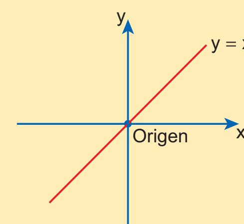


$a < 0 \wedge \Delta = 0$

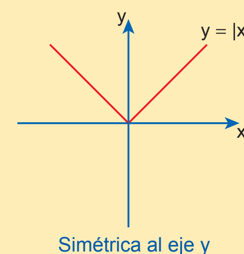
$\{x_1; x_2\}$ son raíces iguales de la ecuación, cuando: $y = 0$

Atención

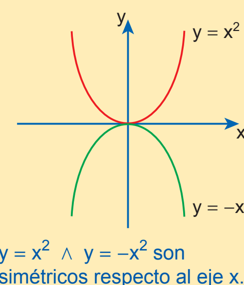
Veamos gráficas con simetría:



Simétrica al origen



Simétrica al eje y



$y = x^2 \wedge y = -x^2$ son simétricos respecto al eje x.



Nota

También podemos hallar la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 4x + 9$ completando cuadrados

$g(x) = 2x^2 - 4x + 9$

$g(x) = 2(\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1) + 9$

$g(x) = 2(x - 1)^2 - 2 + 9$

$\downarrow$

$y = 2(x - 1)^2 + 7$

$y - 7 = 2(x - 1)^2$

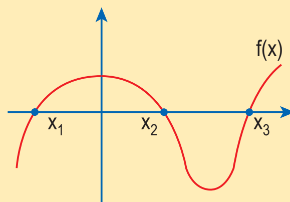
$\underset{k}{\downarrow} \quad \underset{a}{\downarrow} \quad \underset{h}{\downarrow}$

Vértice $(h; k) = (1; 7)$



Observación

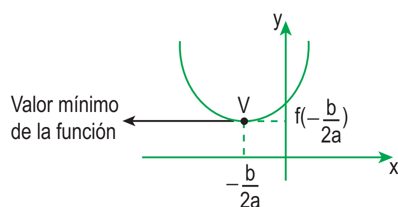
Las raíces o ceros de una función f(x) son los interceptos con el eje x.



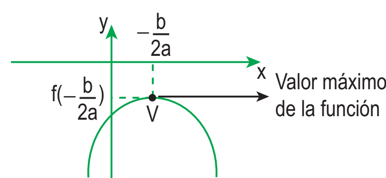
Raíces de $f(x) = \{x_1; x_2; x_3\}$

$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$



$a > 0 \wedge \Delta < 0$



$a < 0 \wedge \Delta < 0$

En esta función, cuando $\Delta < 0$, los valores de las raíces son números complejos.

Ejemplo:

Grafica $g(x) = 2x^2 - 4x + 9$

Resolución:

Sabemos que una función cuadrática tiene forma de parábola cuyo vértice es:

$(h; k) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \Rightarrow g(x) = \underset{a}{2}x^2 - \underset{b}{4}x + \underset{c}{9}$ $\quad a > 0$, la parábola se abre hacia arriba

Hallamos h y k: $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(4)}{2(2)} \Rightarrow h = 1 \quad \Rightarrow$ vértice: (1; 7)

$k = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 9 \Rightarrow k = 7$

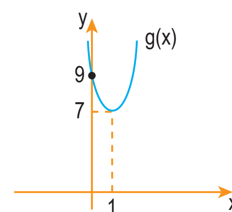
Con estos datos hay más de una posible gráfica.

Determinamos el punto de intersección con el eje y, para ello evaluamos g(0):

$g(0) = 2(0)^2 - 12(0) + 9 = 9$

punto de intersección es: (0; 9)

Graficamos:



7. Función máximo entero: $f(x) = [\![x]\!]$

Donde: $[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n + 1; n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

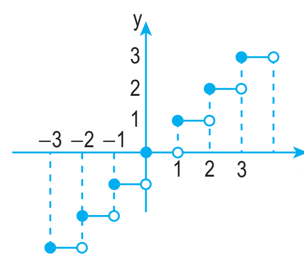
- $[\![2]\!] = 2$
- $[\![3{,}7]\!] = 3$ porque $3 \leq 3{,}7 < 4$ (3: máximo entero)
- $[\![-3{,}2]\!] = -4$ porque $-4 \leq -3{,}2 < -3$ (−4: máximo entero)

Propiedades:

- $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n; n \in \mathbb{Z}$
- $[\![x]\!] > n \iff x \geq n + 1$
- $[\![x]\!] < n \iff x < n$
- $[\![x]\!] \geq n \iff x \geq n$
- $[\![x]\!] \leq n \iff x < n + 1$

Gráfica:

Domf(x)	Ranf(x)
[−3; −2⟩	−3
[−2; −1⟩	−2
[−1; 0⟩	−1
[0; 1⟩	0
[1; 2⟩	1
[2; 3⟩	2
[3; 4⟩	3



Ejemplo:

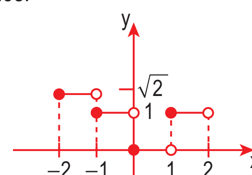
Grafica $f(x) = \sqrt{|[\![x]\!]|}; x \in \langle -2; 2\rangle$

Resolución:

Como es una función máximo entero con valor absoluto, es simétrica.

- $\sqrt{|[\![x]\!]|}$ para $x \in [a; b\rangle$
- $\sqrt{0} = 0$ para $x \in [0; 1\rangle$;
- $\sqrt{1} = 1$ para $x \in [1; 2\rangle$;
- $\sqrt{1}$ para $x \in [-1; 0\rangle$
- $\sqrt{2}$ para $x \in [-2; -1\rangle$

Graficamos:



OTRAS FUNCIONES

Función par

Es una función que se caracteriza por ser simétrica respecto al eje y. Se cumple que:

I. Si: $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ II. $f(x) = f(-x);\ \forall\ x \in Dom(f)$

Función impar

Es aquella función que se caracteriza por ser simétrica respecto al origen.

Se cumple que:

I. Si: $x \in Dom(f) \Rightarrow -x \in Dom(f)$ II. $f(x) = -f(-x);\ \forall\ x \in Dom(f)$

Ejemplos:

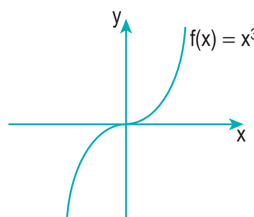
1. Sea $f(x) = x^3$
   - Evaluamos $-x$ en $f(x)$

   $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

   $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

   $\therefore$ f(x) es una función impar.

Gráficamente es simétrica al origen.



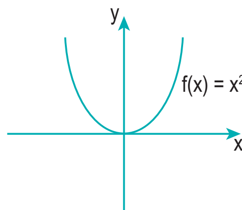
2. Sea $f(x) = x^2$
   - Evaluamos $-x$ en f(x):

   $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

   $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

   $\therefore$ f(x) es una función par.

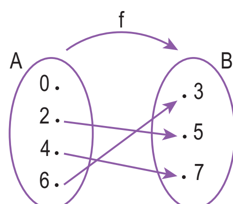
Gráficamente es simétrica al eje y.



Funciones inyectivas, suryectivas y biyectivas

Función inyectiva o univalente

Una función f de A en B se llama inyectiva cuando a cada imagen le corresponde una sola preimagen o dominio.



Propiedad:

Sea $f: A \to B$ inyectiva; $\forall\ x_1; x_2 \in A$

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f = {(2; 5), (4; 7), (6; 3)} es una función inyectiva.

Función suryectiva o sobreyectiva

Una función f es suryectiva cuando el conjunto de llegada coincide con el rango de la función, es decir, a cada imagen le corresponde una preimagen como mínimo.

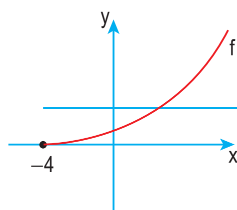
$\text{Si } f: A \to B \Rightarrow Ranf = B$; $\forall$ elemento que pertenece a B existe un $x \in A$.

Función biyectiva

Una función f de A en B es biyectiva; si es inyectiva y suryectiva a la vez.

Ejemplo:

$f: [-4; +\infty\rangle \longrightarrow [0; +\infty\rangle$



¿Es f biyectiva?

Resolución:

Observamos que:

$f: [-4; +\infty\rangle \longrightarrow [0; +\infty\rangle$

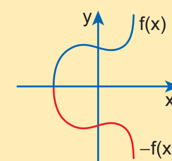
$\Rightarrow$ Es una función inyectiva, gráficamente una recta horizontal la corta en un punto y su rango coincide con su conjunto de llegada.

$\therefore$ Es biyectiva.

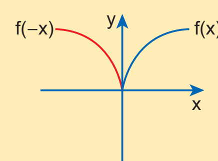


Observación

Sea la función f(x)



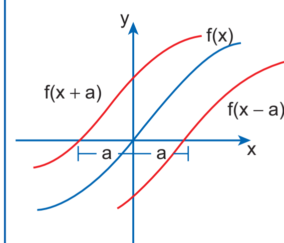
$-f(x)$ se refleja en eje x



$f(-x)$ se refleja en eje y

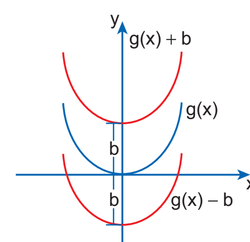
Desplazamiento de la gráfica de una función:

Sea f(x) la función original



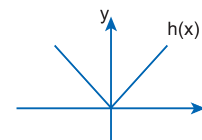
$f(x \pm a)$ la gráfica se desplaza **a** unidades en el eje x.

Sea g(x) la función original

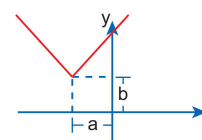


$\Rightarrow g(x) \pm b$ la gráfica se desplaza b unidades en el eje y.

Sea h(x) la función original:



$\Rightarrow h(x + a) + b$ la gráfica se desplaza horizontal y verticalmente.



Problemas resueltos

1 Dados los conjuntos:
$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4)\}$
$C = \{1; 5; 6\}$
Determina: $(A - C) \cup B$

Resolución:

Una rápida inspección en el producto cartesiano $A \times B$ permite reconocer a los conjuntos A y B, veamos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1; 2\} \\ B = \{2; 3; 4\} \\ C = \{1; 5; 6\} \end{array}\right\} \Rightarrow A - C = \{2\}$$

$\therefore (A - C) \cup B = \{2; 3; 4\}$

2 Sea $A = \{1; 2; 4\}$ y f una función definida en A por:
$f = \{(1; 3), (2; a), (a + 1; 2), (1; b + 1)\}$
Calcula: $f(1) - f(2) + f(4)$

Resolución:

Para que f sea una función, necesariamente:
$(1; 3) = (1; b + 1) \Rightarrow b + 1 = 3 \Rightarrow b = 2$
El único valor de $a + 1$ $(a + 1 \in A)$ que satisface para que f sea una función es $4 \Rightarrow a = 3$
$\Rightarrow f = \{(1; 3), (2; 3), (4; 2)\}$
$\therefore f(1) - f(2) + f(4) = 3 - 3 + 2 = 2$

3 Sean las funciones F y G con dominio en $A = \{-3; 0; 1; 2; 4\}$, tales que:
$F = \{(-3; -2), (1; 2), (0; 6), (2; 1), (4; -3)\}$
$G(x) = ax + 2$
Si $G(1) = F(2)$, halla el rango de $G(x)$.

Resolución:

$A = \{-3; 0; 1; 2; 4\}$
$F = \{(-3; -2), (1; 2), (0; 6), (2; 1), (4; -3)\}$
$G(x) = ax + 2$
Del enunciado:
$G(1) = F(2) \Rightarrow a(1) + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$
Luego: $G(x) = -x + 2$
Como Dom $G(x) = A \Rightarrow x \in A$; evaluamos:
$x = -3 \Rightarrow G(-3) = -(-3) + 2 = 5$
$x = 0 \Rightarrow G(0) = -(0) + 2 = 2$
$x = 1 \Rightarrow G(1) = -(1) + 2 = 1$
$x = 2 \Rightarrow G(2) = -(2) + 2 = 0$
$x = 4 \Rightarrow G(4) = -(4) + 2 = -2$
$\therefore \text{Ran}G(x) = \{-2; 0; 1; 2; 5\}$

4 Halla el rango de la función:
$F(x) = 4 + 2x - x^2; x \in [-2; 3\rangle$

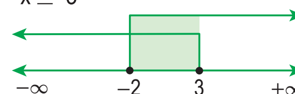
Resolución:

$-2 \leq x < 3$
$-3 \leq x - 1 < 2$
$0 \leq (x - 1)^2 \leq 9$
$\Rightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \leq 9$
$\Rightarrow -1 \leq x^2 - 2x \leq 8$
Por (-1) y sumamos 4:
$5 \geq 4 + 2x - x^2 \geq -4$
$\Rightarrow F(x) \in [-4; 5]$ $\quad\therefore \text{Ran}(F(x)) = [-4; 5]$

5 ¿Cuántos enteros hay en el dominio de la función?
$F(x) = \sqrt[4]{2 + x} + \sqrt[6]{3 - x}$

Resolución:

$F(x) = \sqrt[4]{2 + x} + \sqrt[6]{3 - x}$
Para que la función esté bien definida se debe tener:
$2 + x \geq 0 \ \wedge \ 3 - x \geq 0$
$x \geq -2 \ \wedge \ x \leq 3$



Luego de intersectar: $\text{Dom}(F) = [-2; 3]$
Nos piden el número de valores enteros: $-2; -1; 0; 1; 2; 3$
$\therefore$ Hay 6 números enteros.

6 Dada la relación funcional F, donde:
$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = \dfrac{x + 2}{x - 5}\right\}$
Determina su dominio y rango.

Resolución:

De acuerdo con la teoría procedemos a calcular el dominio y el rango de F.
Dominio: $y = \dfrac{x + 2}{x - 5}$

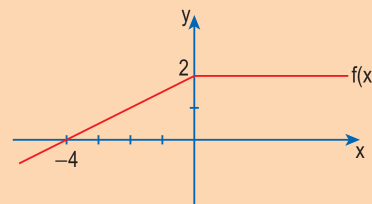
$\Rightarrow x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \quad \therefore x \in \mathbb{R} - \{5\}$

Rango: $y = \dfrac{x + 2}{x - 5}$

$\Rightarrow xy - 5y = x + 2 \Rightarrow (y - 1)x = 5y + 2$

$x = \dfrac{5y + 2}{y - 1} \Rightarrow y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \quad \therefore y \in \mathbb{R} - \{1\}$

7 Determina la ecuación de la gráfica f(x):



Resolución:

Se observa una función lineal de $\langle -\infty; 0]$ y una función constante de $[0; +\infty\rangle$.
En $f(x) \ \forall \ x \in \langle -\infty; 0]$
f(x) (función lineal) $= ax + b$; tenemos los interceptos con los ejes: $(-4; 0)$ y $(0; 2)$, reemplazamos en f(x).
$0 = a(-4) + b$ ... (I)
$2 = a(0) + b$ ... (II)

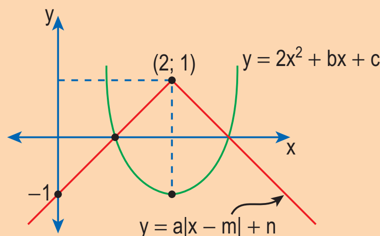
De (II) b = 2 en (I) a = 1/2 $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{x}{2} + 2, \forall x \in \langle -\infty, 0]$

En f(x), $\forall x \in [0, -\infty\rangle$

f(x) (función constante) = 2, $\forall x \in \langle 0, -\infty\rangle$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} x/2 + 2; & x \in \langle -\infty; 0] \\ 2; & x \in \langle 0; +\infty\rangle \end{cases}$$

8 Se muestra la gráfica:



Determina el valor de: T = a + b + c – m – n

Resolución:

De la gráfica: $y = a|x - m| + n$

Se observa que: $m = 2 \wedge n = 1$ (desplazamiento de la función valor absoluto)

Además: si $x = 0$, $y = -1$

$\Rightarrow -1 = a|0 - 2| + 1 \Rightarrow a = -1$

Luego: $y = -|x - 2| + 1$ ...(I)

Para hallar los puntos de corte de la gráfica de la ecuación (I) con el eje x, resolvemos:

$y = 0 \Rightarrow -|x - 2| + 1 = 0 \Rightarrow |x - 2| = 1$

$\Rightarrow x - 2 = 1 \quad \vee \quad x - 2 = -1$

$x = 3 \quad \vee \quad x = 1$

Estos puntos son raíces de: $y = 2x^2 + bx + c$

- Si $x = 1 \Rightarrow 0 = 2(1)^2 + (1)b + c$
  $b + c = -2$ ...(I)
- Si $x = 3 \Rightarrow 0 = 2(3)^2 + 3b + c$
  $3b + c = -18$ ...(II)

Resolvemos (I) y (II): $b = -8 \wedge c = 6$

Nos piden: $T = a + b + c - m - n = -1 + (-8) + 6 - 2 - 1 = -6$

9 Determina la gráfica de $f(x) = [\![x + 1]\!] - 2$; si $x \in [-2; 1]$.

Resolución:

$f(x) = \underbrace{[\![x]\!] + 1}_{\text{Propiedad}} - 2$

$f(x) = [\![x]\!] - 1$

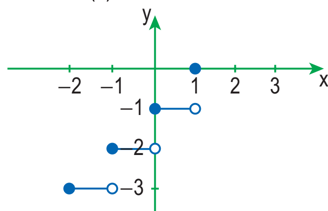
Del dominio seccionamos: $-2 \le x < -1$; $-1 \le x < 0$; $0 \le x < 1$ y $x = 1$

Si $x \in [-2; -1\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 - 1 = -3$

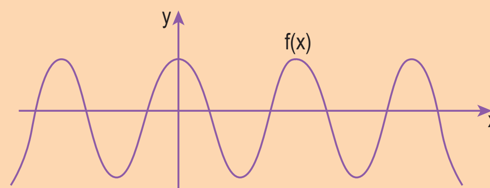
Si $x \in [-1; 0\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 - 1 = -2$

Si $x \in [0; 1\rangle \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = 0 - 1 = -1$

Si $x = 1 \Rightarrow [\![x]\!] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - 1 = 0$

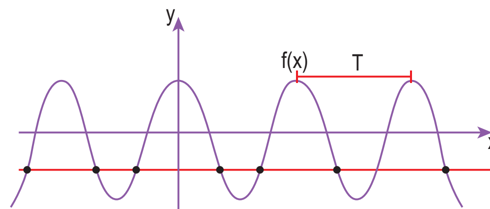


10 Determina si f(x) es inyectiva y/o periódica.



Resolución:

Para determinar si es inyectiva se traza una recta horizontal (paralela al eje x), si interseca a la gráfica solo en un punto será inyectiva.



I. Se observa que una recta horizontal interseca a f(x) en varios puntos.

II. También observamos que es periódica, ya que el mismo punto se repite cada T unidades.

11 En la función $y = 2x - |x| + 3$; $x \in [-5; 2\rangle$ y cuyo rango es $[a; b\rangle$; determina a + b.

Resolución:

Para eliminar el valor absoluto de x restringimos:

$x \in [-5; 0\rangle \quad \vee \quad x \in [0; 2\rangle$

$y = 2x - (-x) + 3 \qquad y = 2x - x + 3$

$y = 3x + 3 \qquad y = x + 3$ (formamos "y" del dominio)

Si: $-5 \le x < 0 \qquad$ Si: $0 \le x < 2$

$-12 \le 3x + 3 < 3 \qquad 3 \le x + 3 < 5$

$-12 \le y < 3 \quad \vee \quad 3 \le y < 5$

$\Rightarrow y \in [-12; 5\rangle \Rightarrow a = -12;\ b = 5$

$\therefore\ a + b = -7$

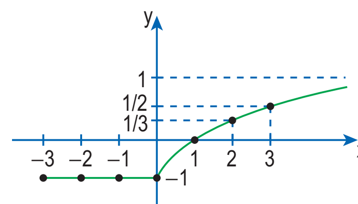
12 Grafica la función:

$$f(x) = \frac{x - 1}{|x| + 1}$$

Resolución:

Tabulando se tiene:

x	–3	–2	–1	0	1/2	1	2	3	...
f(x)	–1	–1	–1	–1	–1/3	0	1/3	1/2	...



Dom(f) = $\mathbb{R}$

Ran(f) = $[-1; 1\rangle$

PROGRESIONES

SUCESIÓN

Es un conjunto de números que se encuentran relacionados por una ley de formación.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Son aquellas sucesiones en las que se cumple que cualquier término es igual al anterior aumentando en una cantidad constante llamada razón o diferencia.

Representación de una PA

$: a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...\ ;\ a_n$ (de cada término al siguiente: $+r$, $+r$)

$: a_1;\ a_1 + r;\ a_1 + 2r;\ ...;\ a_1 + (n - 1)r$

Donde:

a_1: primer término

a_n: término enésimo

n: número de términos

r: razón de la PA

Clases de PA

Las progresiones aritméticas pueden ser:

- Si $r > 0$, la PA es creciente.
- Si $r < 0$, la PA es decreciente.

Propiedades de una PA

Sea:

$: a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_{n-1};\ a_n$ (de cada término al siguiente: $+r$)

1. Razón (r)

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$$

2. Término enésimo (a_n):

Otra notación (t_n)

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \qquad t_n = t_1 + (n - 1)r$$

son equivalentes

3. Número de términos (n):

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

a_n: último término.
a_1: primer término.

4. Término central

Siendo n impar, la PA admite un término central.

$$t_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

5. Suma de los n primeros términos de una PA: (S_n)

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n \quad \text{o} \quad S_n = \left[\frac{2a_1 + (n - 1)r}{2}\right]n$$

$$S_n = t_c \times n$$

Atención

En toda PA la suma de términos equidistantes es constante.

Ejemplo:

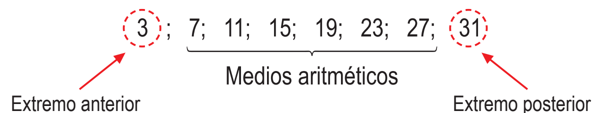
En la siguiente PA:

8; 15; 22; ...; 78; 85; 92

Los términos equidistantes suman: 100

Medios aritméticos

Son los términos comprendidos entre dos extremos de una progresión aritmética.



Interpolación de medios aritméticos

Consiste en determinar los términos de una progresión aritmética a partir de los extremos y el número de medios aritméticos.

$: a;\ \underbrace{...}_{}\ ;\ b$

m medios aritméticos

Por fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Donde: n.° de términos es $n = m + 2$

Reemplazando; $b = a + (m + 1)r$

$$r = \frac{b - a}{m + 1}$$; r: razón aritmética

Observación

Los siguientes términos:

$\frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \frac{1}{12}; ...$

forman una PH ya que 6, 9; 12; ... (los recíprocos) forman una PA.

PROGRESIÓN ARMÓNICA (PH)

Si los elementos $a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...;\ a_n$ forman una PA, entonces sus recíprocos forman una PH, es decir:

$$: \frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \frac{1}{a_3}; ...; \frac{1}{a_n} \text{ es una PH.}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (PG)

Es una sucesión de números en donde un término cualquiera es igual al inmediato anterior multiplicado por la razón de la progresión.

Representación de una PG

:: $t_1; t_2; t_3; ...; t_n$
:: $t_1; t_1q; t_1q^2; ...; t_1q^{n-1}$

Donde:
t_1: primer término
t_n: término enésimo
n: número de términos
q: razón de la PG

Ejemplos:
:: 3; 12; 48; ... es una PG de razón $q = 4$.
:: $mn; mn^2; mn^3; ...$ es una PG de razón $q = n$.
:: 1; 1/4; 1/16; ... es una PG de razón $q = 1/4$.

Clases de PG

Las progresiones geométricas pueden ser:

- Si $q > 1$, la PG es creciente.
- Si $q < 0$, la PG es oscilante.
- Si $0 < q < 1$, la PG es decreciente.

Propiedades de una PG

Sea:
$::t_1; t_2; t_3; ...; t_{n-1}; t_n$

1. **Razón (q):**

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = ... = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

2. **Término enésimo (t_n):**

$$t_n = t_1 . q^{n-1}$$

3. **Número de términos (n):** teniendo en cuenta que t_n, t_1 y q son positivos.

$$n = \frac{\log(t_n) - \log(t_1)}{\log(q)} + 1$$

4. **Términos equidistantes de los extremos**

$$:: \underbrace{t_1; ...; t_x}_{\text{m términos}}; ...; \underbrace{t_y; ...; t_n}_{\text{m términos}}$$

$$t_x . t_y = t_1 . t_n$$

5. **Término central (t_c):**
Siendo n impar, la PG admite término central.

$$t_c = \sqrt{t_1 . t_n}$$

6. **Suma de los n primeros términos de una PG: (S_n)**

$$S_n = t_1 . \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right); q \neq 1$$

7. **Suma límite ($S_{lím}$):** para una PG de infinitos términos, es decir, en caso de que $n \to +\infty$

$$S_{lím} = \frac{t_1}{1 - q}; -1 < q < 1$$

8. **Producto de los n primeros términos de una PG: (P_n)**

$$P_n = \sqrt{(t_1 . t_n)^n}$$

Medios geométricos

Son los términos correspondientes entre los términos extremos de una PG.

$$1; \underbrace{2; 4; 8; 16; 32}_{\text{Medios geométricos}}; 64$$

Extremo anterior (1) — Extremo posterior (64)

Interpolación de medios geométricos

Consiste en determinar los términos de una progresión geométrica a partir de los extremos y el número de medios geométricos.

$$:: a; \underbrace{...}_{\text{m medios geométricos}}; b$$

Por fórmula: $t_n = t_1q^{n-1}$
Donde: n.° de términos es $n = m + 2$
Reemplazando: $b = a . q^{m+1}$

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$ q: razón geométrica

Recuerda

Para n números positivos: $a_1; a_2; a_3; ... ; a_n$

$$MA \geq MG \geq MH$$

MA: media aritmética

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

MG: media geométrica

$$MG = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . ... . a_n}$$

MH: media armónica

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Nota

Series
Son las sumatorias de los términos de una sucesión

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... a_n$$

Series notables

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Problemas resueltos

1 Determina la suma de los últimos 10 términos de:
9; 13; 17; ...; 77

Resolución:

Es una PA de razón 4; entonces:

n.° términos: $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{77 - 9}{4} + 1 = 18$

Hallamos el primer término de los últimos diez (t_9):

$\underbrace{9; 13; ...}_{\text{8 términos}}\ \underbrace{t_9\ ...; 77}_{\text{10 términos}}$

$t_9 = 9 + (8)4 = 41$

Nos piden la suma de los últimos 10 términos:

$S = \frac{(77 + 41)}{2}10 = 590$

2 De una progresión aritmética se conoce:
$a_3 + a_6 = 57$ ...(1)
$a_5 + a_{10} = 99$ ...(2)
Determina la razón.

Resolución:

Sabemos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$

En (1): $a_1 + 2r + a_1 + 5r = 57$
$2a_1 + 7r = 57$ ...(α)

En (2): $a_1 + 4r + a_1 + 9r = 99$
$2a_1 + 13r = 99$ ...(β)

(β) − (α): $6r = 42$ $\therefore r = 7$

3 Calcula el número de términos de la siguiente progresión:
:: 2; 8; ... ; 2048

Resolución:

De la progresión geométrica:

$t_1 = 2$; $t_n = 2048$; $q = \frac{8}{2} = 4$

Por fórmula:

$t_n = t_1q^{n-1}$
$2048 = 2 . 4^{n-1}$
$2^{11} = 2 . 2^{2(n-1)} = 2^{1+2n-2} = 2^{2n-1}$

$\Rightarrow 2n - 1 = 11 \Rightarrow n = 6$

4 Determina la razón de una progresión aritmética si la suma de sus n primeros términos es: $S_n = n(5n - 3)$.

Resolución:

$S_n = n(5n - 3)$
Para n = 1: $a_1 = 2$
Para n = 2: $a_1 + a_2 = 14$
$2 + a_2 = 14 \Rightarrow a_2 = 12$

Si r es la razón, según la definición se verifica:
$r = a_2 - a_1 = 12 - 2 = 10$
$\therefore r = 10$

5 Interpola tres medios aritméticos entre 13 y 21 y halla el término central obtenido.

Resolución:

$13; \underbrace{...}_{\text{tres medios aritméticos}}; 21$

Sabemos que: $r = \frac{21 - 13}{3 + 1}$

$r = \frac{8}{4}$

$\Rightarrow r = 2$

Luego:
: 13; 15; 17; 19; 21
∴ El término central es 17.

6 Reduce:
$F = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{26}{3^6} + \frac{242}{3^{10}} + ...$

Resolución:

$F = 1 + \frac{3 - 1}{3^2} + \frac{3^3 - 1}{3^6} + \frac{3^5 - 1}{3^{10}} + ...$

$F = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^{10}} + ...$

$F = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + ...\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{10}} + ...\right)$

$F = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} - \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{81}} = 1 + \frac{3}{8} - \frac{9}{80} = \frac{11}{8} - \frac{9}{80}$

$\therefore F = \frac{101}{80}$

7 ¿Cuál es el término central de una progresión geométrica de 3 términos positivos si el producto de los 2 primeros es 24 y el producto de los 2 últimos es 54?

Resolución:

Sea:
:: a; b; c $\Rightarrow b^2 = ac$

Dato:
$ab = 24$
$bc = 54$

Multiplicamos:
$\underbrace{ac}_{b^2}b^2 = 24 . 54$

$b^4 = 2^4 . 3^4 \Rightarrow b = 6$